

ლევან შოშიაშვილი

გამოყენებითი ელექტროდინამიკა

(მეთოდური მითითებები. ტიპური ამოცანები)

საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტი
ელექტრონიკის მიმართულება

თბილისი

2010

სარჩევი

1 ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები	3
1.1 ევკლიდის სივრცე	3
1.2 მრუდწირული კოორდინატები	5
1.3 ლამეს პარამეტრები	6
1.4 სკალარული ველის გრადიენტი	7
1.5 ვექტორული ველის დივერგენცია	9
1.6 ვექტორული ველის როტორი	11
1.7 ვექტორი მრუდწირულ კოორდინატებში	12
2 ელექტროსტატიკა	17
2.1 კულონის კანონი	18
2.2 ელექტრული ველი	19
2.3 გაუსის კანონი	22
2.4 გაუსის კანონის დიფერენციალური ფორმა	23
2.5 ველის როტორი და სკალარული პოტენციალი	24
2.6 პუასონის და ლაპლასის განტოლებები	25
2.7 ლაპლასიანი და დელტა ფუნქცია	25
ლაპლასიანი და დელტა ფუნქცია	25
2.8 ელექტრული ველის ენერჯია	26
2.9 გამტარი ელექტროსტატიკურ ველში	29
2.10 პოტენციალი და გრინის ფუნქცია	33
3 ელექტროსტატიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები	39
3.1 გამოსახულების მეთოდი	39
3.2 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი და უსასრულო დამიწებული სიბრტყე	40
3.3 ამოცანა: წერტილოვანი მუხტი რამდენიმე გამტარ სიბრტყეს შორის . .	41
3.4 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი დამიწებული გამტარი სფეროს შიგნით	42
4 ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები	47
4.1 მაქსველის განტოლებები	47
4.2 ტალღური განტოლებები	52
4.3 სასაზღვრო პირობები	53
4.4 უმოგ-პოინტინგის თეორემა	55
5 დისპერსიული ნივთიერებები	57
5.1 შესავალი	57
5.2 მატერიალური განტოლებები და დისპერსიული გარემო	58
ლიტერატურა	59

შესავალი

განხილულია ელექტროდინამიკის ძირითადი ამოცანები. აქცენტი გაკეთებულია პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნაზე. ეს დოკუმენტი წარმოადგენს ლექციების ნაწილს პლიუს მეთოდური მითითებები და დავალებები.

შესაბამის ადგილებში მითითებულია წიგნი/პარაგრაფი რაც მოეთხოვება სტუდენტს. ეს დოკუმენტი არაა წიგნის შემცველი. ამ დოკუმენტის მიზანია:

- გაადვილოს წიგნთან მუშაობა.
- ტიპური ამოცანების ამოხსნა.

ლიტერატურა:

- გ.ჭილაშვილი ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები
- დ.ჯეკსონი. კლასიკური ელ.დინამიკა (რუს., ინგ.)
- ი.ტამი. კლასიკური ელექტროდინამიკა(რუს.).
- ვ.ბატიგინი. ი.ტოპტიგინი. ელექტროდინამიკის ამოცანების კრებული (რუს.).

კურსში ასევე განხილული იქნება ამოცანები დ.ჯეკსონის წიგნიდან.

ტენზორული აღრისხვის ელემენტები

განხილულია ტენზორული აღრისხვის ელემენტები. დაწვრილებით იხ. გ. ჭილაშვილი [1]

§1.1 ევკლიდის სივრცე.

რადიუს ვექტორი განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathbf{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z \quad (1.1.1)$$

სადაც x, y, z რადიუს ვექტორის კოორდინატებია, ხოლო

$$\vec{e}_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

საბაზისო ორტები. მოსახერხებელია შემდეგი ჩაწერა x, y, z ნაცვლად შემოვიტანოთ x_i სადაც ინდექსი i იღებს მნიშვნელობებს 1, 2, 3. მაშინ

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot \vec{e}_i \quad (1.1.3)$$

ხოლო რადიუს ვექტორის სიგრძის კვადრატი იქნება

$$\mathbf{r}^2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i \cdot \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 x_j \cdot \vec{e}_j \right) \quad (1.1.4)$$

მიაქციეთ ყურადღება რომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები ცალ-ცალკე არის სწორედ რადიუს ვექტორის ზემოთ მოყვანილი გამლა, მაგრამ ამ ორ ჯამში ჯამის

აღსანიშნავად გამოყენებულია **სხვადასხვა ინდექსი**. ეს თავიდან აგვაცილებს ჯამების გახსნისას და გადამრავლებისას ე.წ. შერეული წევრების „დაკარგვას“. ასეთ ინდექსებს (ინდექსებს რომლის მიხედვითაც ხდება აჯამება) უწოდებენ „მუნჯ“ ინდექსებს. მუნჯი ინდექსი შეიძლება აღნიშნული იყოს ნებისმიერი ასო-ნიშნით ეს შედეგზე არ მოქმედებს. მუნჯი უნდექსი უნდა მეორედებოდეს მხოლოდ ერთხელ¹. რადგან მუნჯი ინდექსები აჯამვის ინდექსებია, ხშირად ჯამის ნიშანს არ წერენ და იგულისხმება ჯამი განმეორებული ანუ მუნჯი ინდექსებით (ეინშტეინის შეთანხმება) შემოთქმულის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\mathbf{r}^2 = \bar{e}_i \bar{e}_j x_i x_j \quad (1.1.5)$$

სადაც $i, j = \overline{1, 3}$ (იღებს მნიშვნელობებს 1,2,3) ჯამში პირველი ნამრავლი წარმოადგენს საკოორდინატო სისტემის ორტების სკალარულ ნამრავლს. ვიცით რა რომ ევკლიდის სივრცეში დეკარტეს საკოორდინატო სისტემისათვის ორტები ორთოგონალურია (აღებული გვაქვს ერთეულოვანი ორტები) გვექნება $\bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij}$

დავალბა 1.1

შეამოწმეთ $\bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij}$

სადაც δ_{ij} უწოდებენ კრონეკერის სიმბოლოს. ამ შემთხვევაში ესაა 3×3 ერთეულოვანი მატრიცა $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ამის გათვალისწინებით გვექნება

$$\mathbf{r}^2 = \delta_{ij} x_i x_j \quad (1.1.6)$$

δ_{ij} გააჩნია ე.წ. ინდექსის ფილტრაციის თვისება

დავალბა 1.2

შეამოწმეთ $a_i = \delta_{ij} a_j$

$a_i = \delta_{ij} a_j^2$ ანუ კრონეკერის სიმბოლოზე გამრავლება ერთი ინდექსის აჯამვით მუნჯ ინდექსს ცვლის კრონეკერის სიმბოლოს მეორე, თავისუფალი ინდექსით ამ თვისების გათვალისწინებით თუ დავუბრუნდებით რადიუს ვექტორის ფორმულას მივიღებთ

$$\mathbf{r}^2 = x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (1.1.7)$$

¹ განსაკუთრებული შემთხვევები სპეციალურად იქნება აღნიშნული.

² შეგახსენებთ, რომ განმეორებითი ანუ მუნჯი ინდექსით იგულისხმება ჯამი.

ცნობილი ფორმულა სკოლის სახელმძღვანელოდან

§1.2 მრუდწირული კოორდინატები

წერტილის მდებარეობა სივცეში განისაზღვრება რადიუს ვექტორით- \mathbf{r} , რომლის კოორდინატები (q_1, q_2, q_3) დამოკიდებულია საკოორდინატო სისტემის რაობაზე. წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ცალსახად როგორც $q_1 = \text{const}, q_2 = \text{const}, q_3 = \text{const}$ ზედაპირების გადაკვეთის წერტილი. ორი ზედაპირის გადაკვეთა კი იძლევა საკოორდინატო წირებს. ამ წირებზე იცვლება ერთი კოორდინატი ხოლო დანარჩენი ორი უცვლელია. ამ საკოორდინატო წერტილებს ეწოდებათ მრუდწირული. სისტემას ეწოდება მრუდწირული ორთიგონალური თუ კოორდინატის წერტილში გავლებული მხეხები ურთიერთორთოგონალურია. ამ მხეხებს საკოორდინატო ღერძები ეწოდება. მათი მიმართულება იცვლება წერტილიდან წერტილში. $\vec{e}_{q_1}, \vec{e}_{q_2}, \vec{e}_{q_3}$ - სამგანზომილებიანი საკოორდინატო სისტემის საბაზისო ვექტორებია. ნებისმიერი ორთოგონალური სისტემისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს (მარჯვენა საკოორდინატო სისტემა)

$$\vec{e}_{q_1} \times \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_{q_3}, \vec{e}_{q_2} \times \vec{e}_{q_3} = \vec{e}_{q_1}, \vec{e}_{q_3} \times \vec{e}_{q_1} = \vec{e}_{q_2}$$

ხოლო ნებისმიერი ვექტორი იშლება ამ საბაზისო ვექტორების საშუალებით

$$\mathbf{A} = \vec{e}_{q_1} A_{q_1} + \vec{e}_{q_2} A_{q_2} + \vec{e}_{q_3} A_{q_3} \tag{1.2.1}$$

ვექტორის მოდული:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_{q_1}^2 + A_{q_2}^2 + A_{q_3}^2} = \sqrt{A_i^2} \tag{1.2.2}$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი:³

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\vec{e}_{q_1} A_{q_1} + \vec{e}_{q_2} A_{q_2} + \vec{e}_{q_3} A_{q_3}) \cdot (\vec{e}_{q_1} B_{q_1} + \vec{e}_{q_2} B_{q_2} + \vec{e}_{q_3} B_{q_3}) \\ &= A_{q_1} B_{q_1} + A_{q_2} B_{q_2} + A_{q_3} B_{q_3} \\ &= A_i B_i \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_{q_1} & \vec{e}_{q_2} & \vec{e}_{q_3} \\ A_{q_1} & A_{q_2} & A_{q_3} \\ B_{q_1} & B_{q_2} & B_{q_3} \end{vmatrix} = \vec{e}_{q_1} (A_{q_2} B_{q_3} - A_{q_3} B_{q_2}) + \\ &+ \vec{e}_{q_2} (A_{q_3} B_{q_1} - A_{q_1} B_{q_3}) + \\ &+ \vec{e}_{q_3} (A_{q_1} B_{q_2} - A_{q_2} B_{q_1}) + \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

უცვლელია. ამ საკოორდინატო წერტილებს ეწოდებათ მრუდწირული. სისტემას ეწოდება მრუდწირული ორთიგონალური თუ კოორდინატის წერტილში გავლებული მხეხები

³ აქ გამოყენებულ იქნა საბაზისო ვექტორების ორთოგონალიზაციის პირობა.

სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_{q1} & C_{q2} & C_{q3} \\ A_{q1} & A_{q2} & A_{q3} \\ B_{q1} & B_{q2} & B_{q3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} C_i A_j B_k \quad (1.2.5)$$

ε_{ijk} ლევი-ჩივიტას სიმბოლოს უწოდებენ. ესაა ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი ტენზორი. $\varepsilon_{123} = 1$, ხოლო ინდექსის ყოველი შემდგომი გადანაცვლებისას 1 იცვლება -1 -ით. ε_{ijk} ტოლია 0 ნებისმიერი ორი ინდექსის ტოლობის შემთხვევაში.

წირითი ზედაპირული და მოცულობითი ინტეგრალების გამოთვლისას საჭიროა სიგრძის ელემენტის ცოდნა. მრუდწირულ q_i კოორდინატებისთვის dl_i სიგრძის ელემენტს საკოორდინატო წირის გასწვრივ აქვს სახე: $dl_i = h_i dq_i$ ($i = 1, 2, 3$), h_i დამოკიდებულია საკოორდინატო სისტემაზე და მათ ლამეს პარამეტრები ეწოდება⁴ ვექტორის დიფერენციალი:

$$d\vec{l} = \vec{e}_{q1} dl_1 + \vec{e}_{q2} dl_2 + \vec{e}_{q3} dl_3 \quad (1.2.6)$$

ან რაც იგივეა

$$d\vec{l} = \vec{e}_{q1} (h_1 dq_1) + \vec{e}_{q2} (h_2 dq_2) + \vec{e}_{q3} (h_3 dq_3) \quad (1.2.7)$$

მოცულობის ელემენტი:

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (1.2.8)$$

ორთოგონალური სისტემის მაგალითია დეკარტის მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა. მრუდწირული ორთოგონალური სისტემის მაგალითებია სფერული, ცილინდრული და ელიფსური საკოორდინატო სისტემები.

§1.3 ლამეს პარამეტრები

ვთქვათ გვაქვს ორი საკოორდინატო სისტემა დეკარტის კოორდინატებით და მრუდწირული კოორდინატებით და გვაქვს გადასვლის ფუნქციები $x_i(q_1, q_2, q_3)$. მაშინ ლამეს პარამეტრები გამოითვლება ფორმულით:⁵

$$h_{\alpha\alpha}^2 = \sum_{i=1}^3 (\partial x_i / \partial q_\alpha)^2 \quad (1.3.1)$$

მართკუთხა, დეკარტეს საკოორდინატო სისტემიდან, მრუდწირულ სისტემაში გადასვლისას ახალი ორტები იქნება⁶ [0cm]

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{h_{\alpha\alpha}} \sum_{\beta=1}^3 \vec{i}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} \quad (1.3.2)$$

განვიხილოთ სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემები.

⁴დეკარტეს მართკუთხა სისტემაში ტოლია 1.

⁵აქ განმეორებული ინდექსით ჯამი არ იგულისხმება

⁶დაწვ. იხ. გ.ჭილაშვილი[1]

სფერული საკოორდინატო სისტემა

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

ამ შემთხვევაში $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$

დავალება 1.3

გამოთვალეთ ლამეს პარამეტრები, სიგრძის, ფართის და მოცულობის ელემენტები.



ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა

ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში გვაქვს:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

ამ შემთხვევაში $q_1 = \rho, q_2 = \phi, q_3 = z$

დავალება 1.4

გამოთვალეთ ლამეს პარამეტრები, სიგრძის, ფართის და მოცულობის ელემენტები.



§1.4 სკალარული ველის გრადიენტი

გრადიენტი აჩვენებს სკალარული ველის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას და წარმოადგენს სკალარული ველის დიფერენციალურ მახასიათებელს. შემოვიტანოთ ვექტორული, წრფივი ოპერატორი ნაბლა ∇ (ჰამილტონის ოპერატორი)

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.4.1}$$

მაშინ

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi \tag{1.4.2}$$

სკალარული ველის წარმოებული რაიმე \vec{l} ვექტორის გასწვრივ იქნება $\vec{l} \cdot \nabla \varphi$ ველს $\vec{F} = \nabla \varphi$ პოტენციალური ველი ეწოდება, ხოლო φ - პოტენციალი. **test**

ტესტ ტენზორულ აღნიშვნებში:

$$F_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (1.4.3)$$

§1.4.1 მაგალითი: რადიუს ვექტორის მოდულის გრადიენტი

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის მოდულის გრადიენტი

$\mathbf{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$ მოდული:

$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ხოლო გრადიენტი იქნება :

$$\nabla r = \vec{e}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial r}{\partial z} \quad (1.4.4)$$

გამოვთვალოთ კერძო წარმოებული

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

ანუ

$$\nabla r = \vec{e}_x \frac{x}{r} + \vec{e}_y \frac{y}{r} + \vec{e}_z \frac{z}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

იგივე ტენზორულ (კომპონენტურ) ფორმალიზმში გვექნება:

$$\nabla r = \vec{e}_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = \vec{e}_i \frac{\partial(x_j x_j)}{\partial x_i} = \vec{e}_i \frac{2x_i}{2r}$$

რაც იგივეა რაც ზემოთ მოყვანილი ტოლობა.

§1.4.2 მაგალითი: რადიუს ვექტორის კვადრატის გრადიენტი.

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის კვადრატის გრადიენტი.

$$\nabla r^2 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y + \vec{e}_z 2z = 2\mathbf{r}$$

ზოგადად:

$$\nabla r^n = n r^{n-2} \mathbf{r} \quad (1.4.5)$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} r^{-3} (2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.4.6)$$

ვექტორული ველის შემთხვევაში დიფერენციალური მახასიათებლებია ველის დივერგენცია და როტორი .

§1.5 ვექტორული ველის დივერგენცია

დივერგენცია სკალარული სიდიდე და განიმარტება წერტილში

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (1.5.2)$$

დეკარტეს მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z \quad (1.5.3)$$

დავალება 1.5

1. გამოიყვანეთ დივერგენცია სფერულ კოორდინატებში
2. გამოიყვანეთ დივერგენცია ცილინდრულ კოორდინატებში

თუ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ასეთ ველს სოლენოიდური ველი ეწოდება. დივერგენციის ინტეგრალური განმარტება: ვექტორის ნაკადი ერთეულოვანი მოცულობის მქონე სხეულის ერთეულოვანი ფართობის მქონე შემომსაზღვრელი ზედაპირიდან (გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემა.).

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.5.4)$$

მაგალითები

§1.5.1 მაგალითი: რადიუს ვექტორის დივერგენცია

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის დივერგენცია $\nabla \cdot \mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

ცილინდრულ სისტემაში:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.5.5)$$

გავშალოთ \mathbf{r} კომპონენტებად:

$$\mathbf{r} = \vec{e}_r r + \vec{e}_z z$$

აქედან მივიღებთ

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{r} 2r + 1 = 3$$

§1.5.2 მაგალითი: რადიუს ვექტორის და სკალარული ფუნქციის ნამრავლის დივერგენცია

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის და სკალარული ფუნქციის ნამრავლის დივერგენცია. ვთქვათ $\mathbf{K} = \mathbf{r} \varphi(r)$ მაშინ:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{K} &= \nabla \cdot (\mathbf{r} \varphi(r)) = (\nabla \cdot \mathbf{r}) \varphi(r) + \mathbf{r} \nabla \cdot \varphi(r) = & (1.5.6) \\ &= \varphi(r) \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \nabla \varphi(r) \end{aligned}$$

§1.5.3 მაგალითი: რადიუს ვექტორის ნაკადი სფერულ ზედაპირში

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის ნაკადი სფერულ ზედაპირში. ეს შეგვიძლია გამოვთვალოთ ორი გზით: ა). ნაკადის განმარტება

$$\Phi = \int_s \vec{r} \, ds$$

სფერული სიმეტრიის გამო:

$$\Phi = \int_s r \, ds = r \int_s ds = r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^3$$

ბ). ნაკადი ზედაპირში დაკავშირებულია მოცულობით ინტეგრალთან გაუსის თეორემით. ანუ:

$$\Phi = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} \, dv = 3 \int_V dv = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^3$$

მაგალითი: რადიუს ვექტორის ნაკადი ცილინდრული ზედაპირში

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის ნაკადი ცილინდრული ზედაპირში რადიუსით a და სიმაღლით $z = h$. ამ შემთხვევაში ა) მიდგომით გამოთვლა რთულია (გამოსათვლელია $\vec{r} \cdot d\vec{s}$ ცილინდრისათვის) და უმჯობესია გამოვიყენოთ გაუსის თეორემა

$$\Phi = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} \, dV = 3 \int_V dV = 3 (\pi a^2) h$$

§1.6 ვექტორული ველის როტორი

ვექტორის როტორი აღინიშნება როგორც $\text{rot } \mathbf{A}$ ან $\nabla \times \mathbf{A}$ (ზოგიერთ ინგლისურენოვან ლიტერატურაში აღნიშნავენ სიტყვით- **curl**) განვიხილოთ შეკრული წირის გასვრივ ინტეგრალი ვექტორული ველიდან: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\vec{l}$. მაშინ ვექტორის როტორი ეწოდება:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \mathbf{n} \int_C \mathbf{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.6.1)$$

თუ როტორი ნულია ასეთ ველს კონსერვატიული ეწოდება. თუ ველის როტორიდან ავიღებთ ზედაპირულ ინტეგრალს ადგილი აქვს სტოკსის თეორემას:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\vec{s} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.6.2)$$

ჩაკეტილი ზედაპირისთვის კი

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\vec{s} = 0$$

როტორი მრუდწირულ კოორდინატებში:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \vec{e}_{q_1} h_1 & \vec{e}_{q_2} h_2 & \vec{e}_{q_3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (1.6.3)$$

დეკარტის მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში გვაქვს:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

დავალება 1.6

- ა. გამოიყვანეთ როტორი სფერული საკოორდინატო სისტემისათვის.
- ბ. გამოიყვანეთ როტორი ცილინდრული საკოორდინატო სისტემისათვის.



§1.7 ვექტორი მრუდწირულ კოორდინატებში

§1.7.1 ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა

ნებისმიერი \mathbf{A} ვექტორი ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში გაიშლება როგორც

$$\mathbf{A} = A_r \cdot \mathbf{e}_r + A_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi + A_z \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.7.1)$$

სისტემაში გადასაყვანად 1.7.1 გამოსახულების ორივე მხარე უნდ გავამრავლოთ

დეკარტეს მართკუთხა სისტემის შესაბამის ორტზე. კერძოდ:

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x = A_r \cdot \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x + A_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_x + A_z \cdot \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x \quad (1.7.2)$$

1.7.2 განტოლებაში მესამე წევრი ნულია ორტების ორთოგონალობის გამო. დარჩენილი ორტების ნამრავლისთვის კი გვაქვს:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x = \cos(\varphi) \quad (1.7.3)$$

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_x = -\sin(\varphi) \quad (1.7.4)$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$A_x = A_r \cdot \cos(\varphi) - A_\varphi \cdot \sin(\varphi) \quad (1.7.5)$$

ანალოგიურად A_y კომპონენტისთვის მივიღებთ

$$A_y = A_r \cdot \sin(\varphi) + A_\varphi \cdot \cos(\varphi) \quad (1.7.6)$$

თუ ჩავწერთ 1.7.5 და 1.7.6 A_z ერთად მატრიცული სახით :

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.7.7)$$

A_r , A_φ და A_z შეიძლება თავის მხრივ იყვნენ რთული ფუნქციები r , φ და z კოორდინატების ამიტომ საჭიროა მათი გამოსახვა დეკარტეს კოორდინატების საშუალებით.

კავშირი ცილინდრულ და დეკარტეს კოორდინატებს შორის:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

კავშირი დეკარტეს და ცილინდრულ კოორდინატებს შორის:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.7.9)$$

$$\varphi = \text{Arctg}(y/x) \quad (1.7.10)$$

$$z = z \quad (1.7.11)$$

მაგალითი 1.1 ვექტორი ცილინდრულ კოორდინატებში

გამოსახეთ დეკარტეს კოორდინატებში:

$$\mathbf{A} = 3\cos(\varphi)\mathbf{e}_r - 2r\mathbf{e}_\varphi + 5\mathbf{e}_z$$



ამოხსნა 1.1 განტ.1.7.7 გამოყენებით

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos(\varphi) \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} \quad (1.7.12)$$

საიდანაც

$$\mathbf{A} = (3\cos^2(\varphi) + 2r\sin(\varphi))\mathbf{e}_x + (3\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 2r\cos(\varphi))\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z$$

გამოვსახოთ $\sin(\varphi)$ და $\cos(\varphi)$ 1.7.8 განტოლებიდან და გვექნება:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{3x^2}{x^2 + y^2} + 2y \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x \right) \mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z \quad (1.7.13)$$

მაგალითი 1.2

გამოთვალეთ ფუნქციის გრადიენტი:

ა) $V = V_0 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)$

ბ) $V = V_0 R \cos(\theta)$



ამოხსნა 1.2 გამოვიყენოთ დივერგენციის განმარტება დეკარტეს და სფერულ კოორდინატთა სისტემებისთვის.

ა)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(V_0 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) \right) \\ &= \left(-\mathbf{e}_x \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) + \mathbf{e}_y \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) \right) V_0 e^{-x} \end{aligned}$$

ბ)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi} \right) V_0 r \cos\theta \\ &= V_0 \cos\theta \mathbf{e}_r - V_0 \sin\theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

დავალბა 1.7

1.2 მაგალითისთვის დახაზე V და ∇V Matlab გამოყენებით. გამოთვალეთ და დახაზე ∇V წერტილში $(1, 1, 0)$

მაგალითი 1.3

- ა. აჩვენეთ, რომ ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ თუ $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi k/r$
- ბ. აჩვენეთ, რომ სფერულ საკოორდინატო სისტემაში $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ თუ $\mathbf{A} = \mathbf{e}_r f(r)$
- გ. გამოთვალეთ $\nabla \times \mathbf{F}$ სადაც $\mathbf{F} = xy\mathbf{e}_x - 2x\mathbf{e}_y$

ამოხსნა 1.3

- ა. ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემისათვის ლამეს პარამეტრებია $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. როტორისთვის გვექნება:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi r & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (1.7.14)$$

მოცემულ შემთხვევაში გვექნება:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi r & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7.15)$$

- ბ. სფერულ საკოორდინატო სისტემაში ლამეს პარამეტრებისთვის გვაქვს $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin \theta$. როტორისთვის გვექნება

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta r & \mathbf{e}_\varphi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (1.7.16)$$

მოცემული შემთხვევისათვის გვექნება:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta r & \mathbf{e}_\varphi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7.17)$$

გ. პასუხი: $-\mathbf{e}_z(2+x)$

მაგალითი 1.4

ჩვენეთ რომ თუ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) არიან მაქსველის თავისუფალი (წყაროების გარეშე) განტოლებების ამონახსნები გარემოში, რომელიც ხასიათდება μ და ϵ მაშინ $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \cos(\alpha) + \eta \mathbf{H} \sin(\alpha) \\ \mathbf{H}' &= -\frac{\mathbf{E}}{\eta} \sin(\alpha) + \mathbf{H} \cos(\alpha) \end{aligned}$$

ასევე აკმაყოფილებენ მაქსველის განტოლებებს. α ნებისმიერი კუთხეა ხოლო $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ — გარემოს იმპედანსი.

ამოხსნა 1.4 დამტკიცება ნიშნავს, რომ უნდა გამოვთვალოთ $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$ ველების დივერგენცია და როტორი და ვნახოთ მიიღება თუ არა მაქსველის განტოლებები დროში ჰარმონიული ველებისათვის:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}' &= (\nabla \times \mathbf{E}) \cos(\alpha) + \eta \nabla \times \mathbf{H} \sin(\alpha) \\ &= (-i\omega\mu\mathbf{H}) \cos(\alpha) + \eta(i\omega\epsilon\mathbf{E}) \sin(\alpha) \\ &= -i\omega\mu \left(\mathbf{H} \cos(\alpha) - \frac{1}{\eta} \mathbf{E} \sin(\alpha) \right) \\ &= -i\omega\mu\mathbf{H}' \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

ანალოგიურად:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}' &= -\frac{1}{\eta} (\nabla \times \mathbf{E}) \sin(\alpha) + (\nabla \times \mathbf{H}) \cos(\alpha) \\ &= -\frac{1}{\eta} (-i\omega\mu\mathbf{H}) \sin(\alpha) + (i\omega\epsilon\mathbf{E}) \cos(\alpha) \\ &= i\omega\epsilon (\eta\mathbf{H} \sin(\alpha) + \mathbf{E} \cos(\alpha)) \\ &= i\omega\epsilon\mathbf{E}' \end{aligned} \quad (1.7.19)$$

დივერგენციის განტოლებებისთვის გვექნება:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = (\nabla \cdot \mathbf{E}) \cos(\alpha) + \eta(\nabla \cdot \mathbf{H}) \sin(\alpha) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}' = -\frac{1}{\eta}(\nabla \cdot \mathbf{E}) \sin(\alpha) + (\nabla \cdot \mathbf{H}) \cos(\alpha) = 0$$

მაგალითი 1.5

მართკუთხა ტალღამტარში TE_{10} მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{aligned} E_y &= -j\omega\mu a/\pi H_0 \sin(\pi x/a) \\ H_x &= j\beta a/\pi H_0 \sin(\pi x/a) \\ H_z &= H_0 \cos(\pi x/a) \end{aligned}$$

გამოთვალეთ ტალღამტარის შიგა 4 კედელზე მუხტის და დენის განაწილება.

მითითება: გამოიყენეთ სასაზღვრო პირობები ჰაერი-იდეალური მეტალი.

ამოხსნა 1.5 დენი მოიცემა როგორც $\mathbf{J}_s = \vec{n} \times \mathbf{H}$. \vec{n}_y გარეთ მიმართული ნორმალია. გვექნება:

$$\mathbf{J}_x(x=0) = -\vec{n}_y \mathbf{H}_z(0, y, z);$$

$$\mathbf{J}_x(x=a) = \vec{n}_y \mathbf{H}_z(a, y, z);$$

$$\mathbf{J}_y(y=0) = \vec{n}_x \mathbf{H}_z(x, 0, z) - \vec{n}_z \mathbf{H}_x(x, 0, z);$$

$$\mathbf{J}_y(x=b) = -\mathbf{J}_y(y=0); \text{ ვინაიდან იცვლება მხოლოდ ნორმალის მიმართულება რაც შეეხება მუხტს:}$$

$\sigma = \vec{n} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}$ ანუ შეიძლება გვექნოდეს მხოლოდ $y=0$ და $y=b$ კედლებზე (x კედლებზე იგივეურად ნულია). TE_{10} მოდის შემთხვევაში კი, $y=0$ და $y=b$ კედლებზეც $\sigma=0$

ელექტროსტატიკა

ამ თავში განხილულ იქნება ელექტროსტატიკის ამოცანები. ლაპლასის და პუასონის განტოლებები.

გავიხსენოთ მაქსველის განტოლებები:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.1\text{ა})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.1\text{ბ})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.1\text{გ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.1\text{დ})$$

და მატერიალური განტოლებები :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2\text{ა})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2\text{ბ})$$

ვაკუუმისთვის

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ჰნ/მ} \quad (2.3\text{ა})$$

$$\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ფ/მ} \quad (2.3\text{ბ})$$

თუ ჩავთვლით რომ დროზე დამოკიდებულება არ გვაქვს მაშინ (4.1.1) განტოლებათა სისტემა იყოფა ორ ნაწილად.

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4\text{ა})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (2.4\text{ბ})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4\text{გ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad (2.4\text{დ})$$

ვინაიდან (2.4) განტოლებებში ელექტრული და მაგნიტური ველები განცალკე-ბულია შეგვიძლია განვიხილოთ ცალ-ცალკე, ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად, სტატიკური მუხტების და სტატიკური დენების ამოცანები, თუმცა შესაძლოა რომ მოცემულ ამოცანაში მონაწილეობდეს როგორც მუდმივი დენები ასევე მუხტები.

§2.1 კულონის კანონი

ჩართვით კულონმა ექსპერიმენტულად დადგინა, რომ ორი სტატიკური q_1 და q_2 მუხტისათვის მათ შორის მოქმედი ძალა:

1. პროპორციული მუხტის სიდიდისა. აქვს მიზიდვის ხასიათი თუ მუხტები სხვა-დასხვა ნიშნისაა და განზიდვის ხასიათი თუ მუხტები ერთი ნიშნისაა.
2. უკუპროპორციული მუხტებს შორის მანძილის კვადრატისა
3. მიმართულია ორი მუხტის შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ.

მათემატიკურად ამ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \quad (2.1.1)$$

სადაც q_i კოორდინატია \mathbf{x}_i ¹, ხოლო \mathbf{F}_{21} არის ძალა 2 მუხტზე 1 მუხტის მხრიდან. k არის მუდმივა. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია თუ რა საზომ სისტემა გვაქვს არჩეული. განტოლებები (4.1.1), (2.4) და (2.2) ჩაწერილია საერთაშორისო SI სისტემაში. k SI აქვს სახე

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$$

მუხტებს შორის მოქმედი ძალისთვის ადგიული აქვს სუპერპოზიციის პრინციპს ძალა \mathbf{F} q მუხტზე სხვა მუხტების q_i კოორდინატებით \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$ არსებობისას ტოლია თითოეული მუხტიდან მოქმედი ძალების ჯამისა²

$$\mathbf{F} = kq \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2.1.2)$$

სადაც ვგულისხმობთ რომ q მდებარეობს \mathbf{x} წერტილში.

¹მუქი ასო ნიშნებით ავლნიშნავთ ვექტორებს

²ეს გამოწვეულია მაქსველის (4.1.1) განტოლებების წრფივობით

§2.2 ელექტრული ველი

ელექტრული ველი მოცემულ წერტილში განიმარტება როგორც ამ წერტილში მდებარე სანიჯ q მუხტზე მოქმედი ძალის (რომელიც გამოწვეულია სხვა q_i მუხტებისგან) ფარდობა q მუხტთან.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (2.2.1)$$

ელექტრული ველი არის ვექტორული სიდიდე, რაც ნიშნავს, რომ ის არის ვექტორული ფუნქცია \mathbf{x} კოორდინატის და ავლენიანავთ როგორც $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. SI სისტემაში ელექტრული ველის განზომილებაა ვოლტი/მეტრი. თუ მოცემულია წერტილოვანი მუხტები q_i კოორდინატებით \mathbf{x}_i , $i=1,2,\dots,n$, მაშინ

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2.2.2)$$

თუ წერილოვანი მუხტების ნაცვლად ადგილი აქვს მუხტის უწყვეტ განაწილებას მაშინ აზრის აქვს მუხტის სიმკვრივეს $\rho(\mathbf{x})$ - მუხტის რაოდენობა მოცულობის ერთეულში \mathbf{x} მახლობლობაში ამ შემთხვევაში (2.2.2) ჯამი შეიცვლება ინტეგრალით:

$$\sum_{i=1}^n q_i \rightarrow \int dV \rho(\mathbf{x}). \quad (2.2.3)$$

და გვექნება:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int dV' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.2.4)$$

როცა გვაქვს მუხტების დისკრეტული განაწილება კვლავ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წარმოდგენა მუხტის სიმკვრივის შესახებ (2.2.4), ოღონდ თითოეული მუხტი მრავლდება დირაკის დელტა ფუნქციასზე.

§2.2.1 წერტილოვანი მუხტების სიმკვრივე და დელტა ფუნქცია.

დელტა ფუნქცია წარმოადგენს განზოგადებულ ფუნქციას და განიმარტება შემდეგი ინტეგრალის საშუალებით:

$$f(a) = \int dx f(x) \delta(x - a) \quad (2.2.5)$$

სადაც $f(x)$ ნებისმიერი x მიმართ უწყვეტი ფუნქციაა, და ინტეგრების საზღვარი შეიცავს $x = a$ წერტილს

როცა $f(x) = 1$ ვღებულობთ

$$\int dx \delta(x - a) = 1, \quad (2.2.6)$$

დელტა ფუნქციის თვისებები:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x) \frac{d\delta(x-a)}{dx} dx = - \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} \quad (2.2.7)$$

და

$$\int_{a_1}^{a_2} \delta[f(x)] dx = \sum_{i=1}^N \left[1 / \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i} \right] \quad (2.2.8)$$

ბოლო გამოსახულებაში x_i წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ნულებს a_1 , a_2 შუალედში.

სამგანზომილებიანი დელტა ფუნქცია განიმარტება როგორც 3 დელტა ფუნქციის ნამრავლი დეკარტეს საკოორდინატო სისტემაში:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (2.2.9)$$

ეს გვაძლევს

$$\int dV f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) \quad (2.2.10)$$

წერტილოვანი მუხტების სიმკვრივე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ დელტა ფუნქციების ჯამის საშუალებით:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (2.2.11)$$

რაც მოგვცემს

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= k \int dV' \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}') / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = \\ &= k \sum_{i=1}^n \int dV' q_i \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) (\mathbf{x} - \mathbf{x}') / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = \\ &= k \sum_{i=1}^n q_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) / |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

რაც არის (2.1.2).

§2.2.2 მაგალითი: დამუხტული ძაფის მიერ შექმნილი ველი

ვთქვათ, გვაქვს თანაბრად განაწილებული მუხტი z ღერძის მიმართ ორიენტირებულ ძაფზე λ წრფივი სიმკვრივით. ავიღოთ სიგრძის ელემენტი (ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა) წერტილში. მაშინ ამ ელემენტზე მოსული მუხტი იქნება $\lambda dz'$. განვიხილოთ ამ ელემენტის მიერ შექმნილი შექმნილი ველი:

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda dz' \frac{\mathbf{r}\mathbf{e}_r - z'\mathbf{e}_z}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (2.2.13)$$

ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე ველი არაა დამოკიდებული ϕ . ავიღოთ ინტეგრალი z გასწვრივ (2.2.13) ტოლობაში:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z})_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-l_1}^{l_2} dz' \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (2.2.14)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z})_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda r \int_{-l_1}^{l_2} dz' \frac{1}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (2.2.15)$$

ინტეგრება გვაძლევს:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{e}_z - l_2\mathbf{e}_r}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{e}_z + l_1\mathbf{e}_r}{\sqrt{r^2 + l_1^2}} \right) \quad (2.2.16)$$

როცა $l_1/r \rightarrow \infty$ და $l_2/r \rightarrow \infty$, მაშინ $E_z \rightarrow 0$ და გვრჩება მხოლოდ განივი კომპონენტი:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r \quad (2.2.17)$$

z გასწვრივ ძაფის უსასრულობა ნიშნავს, რომ ფაქტიურად გვაქვს ორგანზომილებიანი ამოცანა. (2.2.17) მივიღეთ, რომ ველი (და შესაბამისად მუხტზე მოქმედი ძალა) უკუპროპორციულია არა მანძილის კვადრატისა, როგორც ეს გვაქვს კულონის კანონში, არამედ მანძილის პირველი ხარისხის. რაც ნიშანდობლივია ორგანზომილებიანი ამოცანისთვის.

§2.2.3 მაგალითი: დამუხტული რგოლის ველი

ვთქვათ გვაქვს Δr სიგანის მქონე σ ზედაპირული სიმკვრივით თანაბრად დამუხტული r რადიუსის მქონე რგოლი. უნდა ვიპოვნოთ ელექტრული ველი z ღერძის გასწვრივ. ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე არანულოვანი გვექნება მხოლოდ E_z მდგენელი. ავიღოთ რგოლზე რაიმე მცირე ელემენტი. ამ ელემენტზე მოსული მუხტი იქნება $dq = \sigma \Delta r r d\phi$ (გვაქვს ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა) და განვიხილოთ მის მიერ შექმნილი ველი:

$$d\mathbf{E}_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \mathbf{e}_z \quad (2.2.18)$$

სადაც r' მუხტის ელემენტის რადიუს ვექტორია, ხოლო r z ღერძზე წერტილის რადიუს ვექტორი. მაშინ $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = z\mathbf{e}_z - r\mathbf{e}_r$ გათვალისწინებით:

$$d\mathbf{E}_z = \frac{dqz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \quad (2.2.19)$$

მთელ რგოლზე ინტეგრება მოგვცემს სრულ მუხტს რაც არის რგოლზე $Q = 2\pi\sigma\Delta r r$ და ველისთვის გვექნება:

$$E = |\mathbf{E}_z| = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2.2.20)$$

როცა $z \gg r$ მაშინ $(z^2 + r^2)^{3/2} = z^3$ რაც ნიშნავს, რომ შორ მანძილებზე ველი იქცევა როგორც წერტილოვანი მუხტის ველი.

§2.2.4 მაგალითი: დამუხტული სიბრტყის ველი

განვიხილოთ დამუხტული სიბრტყის ველი. განვიხილოთ სიბრტყე როგორც კონცენტრული რგოლების ერთობლიობა. რგოლის ველი კი გამოთვლილი გვაქვს ზემოთ განხილულ მაგალითში.

ერთი რგოლისათვის სიბრტყეზე გვაქვს

$$d\mathbf{E} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \quad (2.2.21)$$

სოლო ველი იქნება:

$$E_z = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{\infty} dr \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_z^{\infty} dR \frac{1}{R^2} \quad (2.2.22)$$

ამგვარად

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \quad (2.2.23)$$

ანუ მივიღეთ, რომ ველი მუდმივია და არაა დამოკიდებული z კოორდინატებზე. ასე იმიტომ გამოვიდა რომ ელექტრულად გვაქვს ერთგანზომილებიანი ამოცანა (სიბრტყე უსასრულოა და სიმეტრიიდან გამომდინარე ველი არ უნდა იყოს დამოკიდებული x და y კოორდინატებზე. სიბრტყის ნებისმიერი წერტილისათვის მოიძებნება მისი სიმეტრიული წერტილი კოორდინატის სათავეს მიმართ რომლის მიერ შექმნილი ველის E_x და E_y კომპონენტები ერთმანეთს აბათილებს). და ზოგადად ერთ განზომილებიან ამოცანებში ელექტრული ველი მუდმივია მუხტის თანაბრად განაწილებისას.

§2.3 გაუსის კანონი

კულონის კანონი საშუალებას იძლევა სასინჯი მუხტის და ამ მუხტზე მოქმედი ძალის საშუალებით გაზომილ და გამოთვლილ იქნას ელექტრული ველი, მაგრამ ხშირ შემთხვევებში მოსახერხებელია ელექტრული ველი გამოთვლილ იქნას უშუალოდ ან ჯერ გამოთვლილ იქნას ველის პოტენციალი, ხოლო შემდეგ ველი. აღსანიშნავია რომ ზემოთ მოყვანილი კულონის კანონი სამართლიანია 3 განზომილებიანი სივრცისათვის. ორ და ერთ განზომილებიან შემთხვევაში იცვლება როგორც ველის ფუნქცია ასევე ძალაც და პოტენციალიც. უცვლელია მხოლოდ განტოლებების სახე. ამას შემდეგ თავებში ვნახავთ. ცალკეულ შემთხვევებში ელექტრული ველი შეიძლება გამოთვლილ იქნას გაუსის კანონის საშუალებით.

განვიხილოთ **ორგანზომილებიანი** შემთხვევა. განვიხილოთ მუხტი, რომელიც მდებარეობს შეკრული \mathbf{C} წირის შიგნით და განვიხილოთ ამ მუხტის მიერ შექმნილი ველის წირის ნორმალის გასწვრივი მდგენელის ინტეგრალი შეკრულ წირზე. შემდგომში ვანახებთ რომ ველი ორგანზომილებიან შემთხვევაში არის $1/(2\pi\epsilon_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2$. ელექტრული ველის კომპონენტი ნორმალის გასწვრივ არის $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 1/(2\pi\epsilon_0)q\cos(\theta)/r$, სადაც r არის მანძილი მუხტიდან საინტეგრაციო წირის წერტილამდე. $d\cos(\theta)/r$ არის რკალის ელემენტის შესაბამისი კუთხე $d\phi$ და ინტეგრალი დაიყვანება კუთხით ინტეგრებაზე. **სამგანზომილებიან** შემთხვევაში კი, ველი იცვლება, როგორც $1/r^2$ (კულონის კანონი) ხოლო $d^2x \cos \theta / r^2$ წარმოადგენს

სხეულოვანი კუთხის ელემენტს $d\Omega$ რომელიც შემოსაზღვრულია S ზედაპირის ინფინიტიზიმალური ds ფართის ელემენტით ზედაპირული ინტეგრალი იცვლება სხეულოვან კუთხეზე ინტეგრებით რაც ტოლია 4π . თუ მუხტი არაა ზედაპირის შიგნით მაშინ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია, ვინაიდან ინტეგრებისას სხეულოვანი კუთხე შეიცვლის ნიშანს

$$\int_S ds [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = \begin{cases} 4\pi kq, & q \text{ ეკუთვნის } S \\ 0, & q \text{ } S \text{ ზედაპირის გარეთაა} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

სუპერპოზიციის პრინციპის გამო თუ ზედაპირში იმყოფება რამდენიმე მუხტი, თითოეულს ცალცალკე შეაქვს წვლილი და გაუსის კანონს (ინტეგრალური ფორმა) აქვს სახე:

$$\int_S ds [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = 4\pi Q \quad (2.3.2)$$

სადაც Q ზედაპირის შიგნით მყოფი სრული მუხტია,

$$Q = \int_V dV \rho(\mathbf{x}). \quad (2.3.3)$$

§2.4 გაუსის კანონის დიფერენციალური ფორმა

გაუსის კანონის დიფერენციალურ ფორმას მივიღებთ დივერგენციის თეორემის საშუალებით. ნებისმიერი $C(\mathbf{x})$ ვექტორული ველისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_S ds [C(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = \int_V dV [\nabla \cdot C(\mathbf{x})]. \quad (2.4.1)$$

გაუსის კანონისათვის ეს გვაძლევს:

$$4\pi k \int_V dV \rho(\mathbf{x}) = \int_S ds [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = \int_V dV [\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})] \quad (2.4.2)$$

რაც გვაძლევს

$$\int_V dV [\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) - 4\pi k\rho(\mathbf{x})] = 0 \quad (2.4.3)$$

ვინაიდან V ნებისმიერია ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს იგივეურად ნული ანუ

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi k\rho(\mathbf{x}) \quad (2.4.4)$$

თუ გავიხსენებთ k განმარტებას SI სისტემაში მაშინ

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0 \quad (2.4.5)$$

რაც არის (2.4დ)

როცა გვაქვს წერტილოვანი მუხტი მაშინ:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\epsilon_0 \quad (2.4.6)$$

§2.5 ველის როტორი და სკალარული პოტენციალი

ვექტორული ველის ცალსახად განსაზღვრისათვის მხოლოდ ველის დივერგენციის ცოდნა არაა საკმარისი, საჭიროა ასევე ვიცოდეთ ველის როტორი. ამ პარაგრაფში გამოვიყვანთ ველის როტორის მნიშვნელობას და შემოვიტანთ ველის პოტენციალის ცნებას. დავუბრუნდეთ კულონის კანონს:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int dV' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.5.1)$$

მაგრამ ამ ინტეგრალის ნაწილი შეგვიძლია ჩავწეროთ როგორც გრადიენტი

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (2.5.2)$$

დავალემა

დავალემა 2.1

გამოიყვანეთ (2.5.2) ტოლობა

სადაც გრადიენტი აღებულია \mathbf{x} ცვლადით³. ამგვარად გვაქვს

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -k \nabla \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.5.3)$$

ანუ, \mathbf{E} შეიძლება ჩავწეროთ როგორც უარყოფითი გრადიენტი \mathbf{x} ცვლადის სკალარული ფუნქციიდან. ამ ფუნქციას ეწოდება სკალარული პოტენციალი $\Phi(\mathbf{x})$:

$$\Phi(\mathbf{x}) \equiv k \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}; \quad (2.5.4)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.5.5)$$

(2.5.5) გამომდინარეობს, რომ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ ვინაიდან როტორი ნებისმიერი ფუნქციის გრადიენტიდან ტოლია ნულისა. ანუ გვაქვს

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi k \rho(\mathbf{x}) \quad (2.5.6)$$

და

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.5.7)$$

რაც არის მაქსველის (4.1.1) განტოლებები (2.4გ) და (2.4დ) ელექტროსტატიკური $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ველისათვის.

³ \mathbf{x} აღნიშნავს კოორდინატს სადაც ვითვლით ველს, რომელსაც ქმნის მუტი \mathbf{x}' კოორდინატით

ამ განტოლებებიდან გამომდინარეობს ასევე ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტი: შევკრულ წირზე ველის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. ეს გამოწვეულია ველის გრადიენტულობიდან ანუ რაც იგივეა ველის როტორის ნულთან ტოლობით. მუშაობა (პოტენციური ენერჯის ცვლილება) განისაზღვრება მხოლოდ პოტენციალთა სხვაობით ორ წერილს შორის და არა წირით თუ რა წირზე ვმოდრობთ (გადაგვაქვს მუხტი, ვაერთებთ ამ ორ წერტილს). ამ ამოცანის ამოსახველად უნდა მოვათავსოთ გამოსახულება მუხტები ისე რომ დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობა. ამისათვის საჭიროა ხუთი გამოსახულება მუხტი როგორც ეს აღნიშნულია ზემოთ სურ. ?? მათ აქვთ იგივე ρ და z კოორდინატი რაც აქვს რეალური მუხტს, (2.7.4) 25

§2.6 პუასონის და ლაპლასის განტოლებები

E თვის მირებული განტოლებები სასაზღვრო პირობებით საკმარისია ვიპოვნოთ ველი მუხტის მოცემული განაწილებისათვის, მაგრამ ხშირად მოსახერხებელია ჯერ ვიპოვნოთ Φ , ხოლო შემდეგ E . ვინაიდან $\nabla \cdot E = 4\pi k\rho$, და $E = -\nabla\Phi$, გვაქვს

$$\nabla \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) \equiv \nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi k\rho(\mathbf{x}) \quad \text{პუასონის განტოლება} \quad (2.6.1)$$

∇^2 არის ლაპლასის ოპერატორი. იმ არეში სადაც მუხტი არაა (2.6.1) ნაცვლად გვაქვს

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ლაპლასის განტოლება,} \quad (2.6.2)$$

§2.7 ლაპლასიანი და დელტა ფუნქცია

განვიხილოთ როგორ მოქმედებს $\nabla^2 \Phi$ პოტენციალზე:

$$-4\pi k\rho(\mathbf{x}) = \nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = k \int dV' \rho(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (2.7.1)$$

რაც გვაძლევს

$$\rho(\mathbf{x}) = - \int dV' \rho(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (2.7.2)$$

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ განმარტებულია როგორც

$$f(\mathbf{x}) = \int dV' f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.7.3)$$

ნებისმიერი $f(\mathbf{x})$. $\rho(\mathbf{x})$ შეიძლება იყოს ნებისმიერი, რაც ნიშნავს რომ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.7.4)$$

ეს განტოლება გაუსის ერთეულოვან სისტემაში ($k = 1$) წარმოადგენს პუასონის განტოლებას ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტისთვის სიმკვირივით $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ და პოტენციალით $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ (მუხტი მდებარეობს \mathbf{x}' წერტილში და ქმნის

პოტენციალს \mathbf{x} წერტილში), მაგრამ არა SI სისტემაში. SI სისტემაში ორივე მხარე უნდა გავამრავლოთ k ზე . (2.7.4) შეგვიძლია მივიღოთ სხვა გზითაც. გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებში.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(r \frac{1}{r} \right) = 0, \quad (2.7.5)$$

ეს ძალაშია ყველგან გარდა $r = 0$ სადაც r/r არაა განმარტებული.რომ ვნახოთ რა ხდება ამ წერტილში ვაინტეგრირებთ $\nabla^2(1/r)$ სფეროზე ცენტრით კოორდინატთა სათავეში:

$$\begin{aligned} \int_V dV \nabla^2(1/r) &= \int_V dV \nabla \cdot \nabla(1/r) = \\ &= \int_S ds [\nabla(1/r)] \cdot \mathbf{n} = - \int_S ds (1/r^2) = \\ &= - \int r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi (1/r^2) = -4\pi. \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

ამგვარად გვაქვს:

$$\begin{aligned} (i) \quad \nabla^2(1/r) &= 0, \quad r \neq 0 \\ (ii) \quad \int_V dV \nabla^2(1/r) &= -4\pi, \quad r = 0 \quad V \text{ მოცულობაში.} \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

რაც ნიშნავს რომ

$$\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{x})$$

§2.8 ელექტრული ველის ენერჯია

განვიხილოთ ელექტროსტატიკური ველი ენერჯია. ვთქვათ გვაქვს n რაოდენობის წერტილოვანი მუხტი q_i კოორდინატით \mathbf{x}_i . მუშაობა რომელიც საჭიროა ელექტრულ ველში არსებული q მუხტის ერთი წერილიდან მეორეში გადასატანად ტოლია q ნამრავლისა ამ ორ წრტილს შორის პოტენციალთა სხვაობაზე. თუ დავუშვებთ რომ ეს პოტენციალი შექმნილია წერტილოვანი მუხტების მიერ გვექნება:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n [q_i/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|] \quad (2.8.1)$$

და მუშაობა რომელიც საჭიროა შესრულდეს იმისათვის, რომ q გადავიტანოთ უსასრულობიდან, სადაც $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, \mathbf{x} წერტილში არის

$$W = q \sum_{i=1}^n [q_i/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|]. \quad (2.8.2)$$

რაც ნიშნავს, რომ მუხტების სისტემის ენერჯია იზრდება, როცა ვუმატებთ მუხტს. ეს მიდგომა შეგვიძლია გამოვიყენოთ მუხტების სისტემის ენერჯიის გამოსათვლელად. ვთქვათ მოცემულ სასრულ არეში არავითარი მუხტი არ გვაქვს და სათითაოდ

უსასრულობიდან ვუმატებთ ახალ მუხტს (ვთვლით რომ უსასრულობაში მუხტებს შორის დაშორება დიდია, ანუ არ ურთიერთქმედებენ). პირველი მუხტის მოსატანად \mathbf{x}_1 წერტილში არავითარი მუშაობა არ სრულდება, ვინაიდან $\Phi = 0$, როცა სხვა მუხტები არ გვაქვს. მეორე მუხტის მოსატანად საჭიროა დაიხარჯოს ენერგია:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \quad (2.8.3)$$

მესამე მუხტის მოსატანად

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \sum_{j=1}^2 \frac{q_j}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_j|}, \quad (2.8.4)$$

და ა.შ. სრული მუშაობა რომელიც საჭიროა შესრულდეს i -ური მუხტისათვის არის:

$$W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.8.5)$$

თუ შევკრებთ ყველა ამ ენერგიას მაშინ სრული მუშაობა, ანუ მუხტების სისტემის ენერგია ტოლია:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (2.8.6)$$

სადაც ჯამი აღებულია ყოველი წყვილით და წყვილი ჩათვლილია მხოლოდ ერთხელ; ეს შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}; \quad (2.8.7)$$

სადაც შტრიხ ნიშანი ნიშნავს რომ $i = j$ წევრები გამოტოვებულია. ამ ჯამში შედის ყოველი i, j $i \neq j$ წყვილი ორჯერ ამიტომ წინ აქვს მამრავლი $1/2$. იგივე მსჯელობა შეგვიძლია გამოვიყენოთ მუხტის უწყვეტი განწილებისათვის, თუ დავუშვებთ რომ უსასრულო მცირე მოცულობებში გვაქვს სასრული მუხტის სიმკვრივე (და არა წერტილოვანი მუხტები) გვექნება

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int dV dV' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.8.8)$$

ამ შემთხვევაში ინტეგრება არაა შეზღუდული და შეიცავს წერტილს $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, ვინაიდან უსასრულოდ მცირე მოცულობაში განაწილებული მუხტის ურთიერთქმედების ენერგია საკუთარ თავთან მიისწრაფვის ნულიკენ, როცა მოცულობა მიისწრაფვის ნულისკენ. ამგვარად, თუ მოცულობაში მუხტის უწყვეტ განაწილებასთან ერთად გვაქვს სხვა სასრული (წერტილოვანი) მუხტები, რომლებიც წარმოდგება დელტა ფუნქციის საშუალებით $\rho(\mathbf{x})$ სიმკვრივის ფუნქციაში, მაშინ აუცილებელია ასეთი მუხტების თვითურთიერთქმედების გამორიცხვა, როგორც ეს არის გათვალისწინებული ზემოთ მოყვანილ სასრულ ჯამში, იმისათვის, რომ ენერგია იყოს სასრული.

ენერჯის W გამოსახულება შეიძლება ჩაწერილ იქნას სხვადასხვა ფორმით. გავიხსენოთ რომ,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}; \quad (2.8.9)$$

ამის ჩასმა W ენერჯის გამოსახულებაში გვაძლევს:

$$W = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.8.10)$$

ამას გარდა $\rho(\mathbf{x}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi(\mathbf{x})$, რაც მოგვცემს

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \Phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.8.11)$$

ავიღოთ ეს ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრებით. ამისათვის გამოვიყენოთ დივერგენციის თეორემა. $f(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ვექტორული ველისათვის განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\begin{aligned} \int_V dV \nabla \cdot [f(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})] &= \int_S ds f(\mathbf{x})[\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] \\ &= \int_V dV [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] + \int_V dV f(\mathbf{x})[\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

ანუ

$$\int_V dV f(\mathbf{x})[\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] = - \int_V dV [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] + \int_S ds f(\mathbf{x})[\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}], \quad (2.8.13)$$

ამ ფორმულას თუ გამოვიყენებთ W ენერჯის ინტეგრალისთვის:

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \Phi(\mathbf{x}) \nabla \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) \quad (2.8.14)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) - \int ds \Phi(\mathbf{x})[\nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] \quad (2.8.15)$$

ანუ

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})]. \quad (2.8.16)$$

ზედაპირული ინტეგრალი ნულია ვინაიდან Φ მცირდება მუხტის განაწილების არედან შორს r მანძილზე როგორც $1/r$. მაშინ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ეცემა, როგორც $1/r^3$, მაშინ როცა r მანძილზე ფართობი არის r^2 რიგის. რაც ნიშნავს რომ შორ მანძილებზე ინტეგრალი ეცემა როგორც $1/r$ და ამგვარად ნულია უსასრულობაში.

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ინტერპრეტირება შეიძლება როგორც ელექტრული ველის ენერჯის სიმკვივე $u(\mathbf{x})$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (2.8.17)$$

მაგრამ ეს მხოლოდ ინტერპრეტაციაა. ჩვენ ვიცით მხოლოდ ამ სიდიდის ინტეგრალის მნიშვნელობა მთელ სივრცეში. ამგვარი ინტერპრეტაციის საშუალებას იძლევა ის ფაქტი რომ $u(\mathbf{x})$ ყველგან დადებითია ან ნული. ასევე შევნიშნოთ, რომ ენერჯის მეორე გამოსახულებში გვაქვს $\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})/2$, რაც შეიძლება იყოს როგორც დადებითი ასევე უარყოფითი და არ შეიძლება მისი ინტერპრეტირება როგორც ენერჯის სიმკვირვისა.

W გამოსახულებიდან ჩანს, რომ (2.8.17) ენერჯია არის დადებითად განმარტებული. მეორე მხრივ დადებითი და უარყოფითი მუხტების წყვილის q და $-q$, კოორდინატებით \mathbf{x} და \mathbf{x}' არის უარყოფითი, კერძოდ $-q^2/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. მიზეზი ისაა, რომ ორი წერტილოვანი მუხტისსათვის ენერჯის გამოსახულებაში არ შედის ამ ორი მუხტის შექმნაზე დახარჯული დადებითი, უსასრულო ენერჯია მაგრამ (2.8.17) ეს ენერჯია შედის. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ორი სხვადასხვა ნიშნით დამუხტული სხეული ენერჯია რომელიც საჭიროა რომ ეს სხეულები მოვიტანოთ უსასრულობიდან მოცემულ წერტილებში არის უარყოფითი სურ. ??, მაშინ როცა მუხტების ამ განაწილების "ასაწყობად", ანუ ნაწილ ნაწილ უსასრულობიდან მოსატანად საჭიროა დადებითი ენერჯია სურ. ??.

§2.9 გამტარი ელექტროსტატიკურ ველში

ელექტრომაგნიტური ამოცანების ამოსახსნელად მნიშვნელოვანია თუ როგორ იქცევა ველი ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე. ამ შემთხვევაში განვიხილოთ გამტარი-ჰაერის სასაზღვრო შემთხვევა (ორი სხვადასხვა დიალექტრიკული გარემოს შორის სასაზღვრო პირობას მოგვიანებით განვიხილავთ).

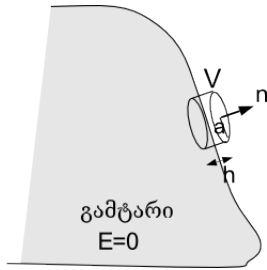
§2.9.1 სასაზღვრო პირობები

განვიხილოთ გამტარი ელექტროსტატიკურ ველში. გამტარის შიგნით ველი ნულია. ველი გამტარის ზედაპირზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ელექტროსტატიკის განტოლებების: $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$ და $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ საშუალებით. განვიხილოთ გაუსის კანონი (პირველი განტოლება).

ავიღოთ ინტეგრალი 2.9.1 სურათზე აღნიშნულ ცილინდრულ (ღერძი მიმართულია ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ) ზედაპირზე. ცილინდრის ნახევარი მდებარეობს ჰაერში მეორე ნახევარი კი გამტარში.

დივერგენციის თეორემის გამოყენებით მოცულობითი ინტეგრალი შეგვიძლია გადავიყვანოთ ზედაპირულში. დავუშვათ რომ ცილინდრის სიმაღლე h გაცილებით ნაკლებია რადიოსზე $h \ll a$. მაშინ ინტეგრალში წვლილს შეიტანს მხოლოდ ცილინდრის ბოლოები და მასში გამავალი ველის ნაკადი. ამავე დროს $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ გამტარში, ამრიგად ინტეგრალში რჩება მხოლოდ გამტარის ზედაპირის მიმართ ველის

ნორმალური მდგენელი (ნორმალის მიმართულია გამტარის გარეთ) \mathbf{E} . თუ ასევე დავშვებთ, რომ a მანძილზე ველი საგრძობლად არ იცვლება, მაშინ მივიღებთ, რომ ეს ინტეგრალი ტოლია $\pi a^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{x})$, სადაც \mathbf{x} წერტილი გამტარის ზედაპირის გარეთაა და ინდექსი n აღნიშნავს გარე ნორმალის გასწვრივ ველის მდგენელს.



სურ 2.1: ლითონი-ჰაერი სასაზღვრო პირობა

რაც შეეხება მოცულობით ინტეგრალს გაუსის კანონში ტოლობის მარჯვენა მხრიდან, საჭიროა მოცულობითი მუხტის სიმკვრივე დავაკავშიროთ მუხტის ზედაპირულ სიმკვრივესთან. ვინაიდან მუხტი გვაქვს მხოლოდ გამტარის ზედაპირზე, თუ შემოვიტანთ ზედაპირიდან ნორმალის გასწვრივ გარე მიმართულებით მანძილის ფუნქციას $\xi(\mathbf{x})$, მაშინ ამ ფუნქციის და დელტა ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია დავაკავშიროთ $\rho(\mathbf{x})$ და $\sigma(\mathbf{x})$. ამასთან $h \ll a$ დაშვებიდან გამომდინარეობს რომ ამ მოცულობით ინტეგრალში, უფრო სწორედ მუხტის მოცულობით სიმკვრივეში წვლილი შეაქვს მხოლოდ ზედაპირულ მუხტს. მაშინ მოცულობითი მუხტის სიმკვრივისათვის გვექნება:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\delta(\xi(\mathbf{x})) \quad (2.9.1)$$

სადაც, როგორც აღვნიშნეთ ξ არის მანძილი \mathbf{x} წერილიდან გამტარის ზედაპირამდე. მოცულობით ინტეგრალში გვექნება ინტეგრება ფართობზე და ინტეგრება ცილინდრის სიმაღლის გასწვრივ $\int_V dV \rho(\mathbf{x}) = \int d\xi \int_S ds \sigma(\mathbf{x})\delta(\xi(x))$, სადაც, დელტა ფუნქციის გამო დავგვრჩება მხოლოდ ზედაპირული ინტეგალი. თუ დავუშვებთ რომ ზედაპირული სიმკვრივე არ იცვლება ამ მცირე ფართობში მაშინ ინტეგრალი იქნება უბრალოდ წერტილის ფართობის პროპორციული πa^2 . მარჯვენა მხარე ტოლი ყოფილა $\pi a^2(\sigma(\mathbf{x}))/\epsilon_0$. ანუ გავქვს:

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_S ds \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}_n(\mathbf{x})\pi a^2 = \int_V dV \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0 = \pi a^2 \sigma(\mathbf{x})/\epsilon_0 \quad (2.9.2)$$

საიდანაც მივიღებთ რომ

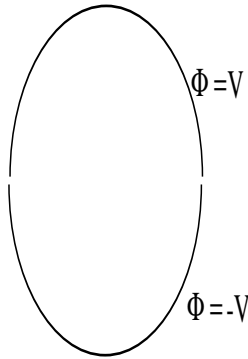
$$\mathbf{E}_n(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})/\epsilon_0 \quad (2.9.3)$$

ასევე შეგვიძლია ვიპოვნოთ სასაზღვრო პირობა მხები მდგენელისათვის. განვიხილოთ წირითი ინტეგრალი $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$ მართკუთხა შეკრული წირის გასწვრივ.

$$\int_S ds (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}_t h = 0 \implies \mathbf{E}_t = 0 \quad (2.9.4)$$

ვუშვებთ, რომ მართკუთხედის სიგანე w ნაკლებია h სიმაღლეზე. ამ ინტეგრალში (რომელიც ნულია) ძირითადი წვლილი შეაქვს მართკუთხედის მხარეებს, რომლებიც ზედაპირის პარალელურია. მეორე მხრივ, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ველი გამტარში ნულია. ანუ გვაქვს ინტეგრალი მხოლოდ გამტარი ზედაპირის გარე მხარეს. ვინაიდან ინტეგრალი ნულია ეს ნიშნავს, რომ $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ველის ტანგენციალური მდგენელი $\mathbf{E}_t(\mathbf{x})$, ასევე ნული უნდა იყოს

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{გამტარის ზედაპირზე.} \quad (2.9.5)$$



სურ 2.2: მხები მდგენელი

§2.9.2 გამტარის ზედაპირზე მოქმედი ძალა

წარმოვიდგინოთ, რომ გამტარის dA ფართის ელემენტში მოთავსებული მუხვი გადავაქვს dx მანძილზე გამტარის ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. ეს ვირტუალური გადაადგილება მოიცავს $dA dx$ მოცულობას. ამ მოცულობაში, პირველ მიახლოებაში⁴ ელექტრული ველი იქნება ნული. სხვაგან კი არ შეიცვლება. ამგვარად ადგილი ექნება ველის ენერჯიის ცვლილებას:

$$dW = -dA dx \frac{\epsilon_0}{2} E_n^2 = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma^2 dA dx + \mathcal{O}(dA d^2x, d^2A dx) \quad (2.9.6)$$

ენერჯიის შენახვის კანონიდან გამომდინარე შესრულებული მუშაობა ტოლია dW . მეორე მხრივ კი ეს მუშაობა ტოლია dx ნამრავლისა ელექტრულ ძალაზე (მინუს ნიშნით), რომელიც მოქმედება dA ფართის ელემენტზე. ამრიგად,

$$-F dx = dW \text{ ან } F = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 dA. \quad (2.9.7)$$

ამრიგად ფართის ერთეულზე მოქმედი ძალა (ანუ წნევა) ტოლი ყოფილა $\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2$; და მიმართულია გამტარის ზედაპირიდან გარეთ ნორმალის გასწვრივ ("უარყოფითი წნევა").

იგივე ამოცანას შეგვიძლია შევხედოთ სხვა კუთხით. ძალა ტოლი უნდა აიყოს dA ფართში მოთავსებულ მუხვზე, ანუ σdA , ელექტრული ველის ნამრავლისა რომელიც მოქმედებს ამ მუხვზე. ანუ ესაა ელექტრული ველი შექმნილი დანარჩენი ზედაპირის მხრიდან ამ მცირე არეში, როცა მასში არაა მუხვი. ეს ველი კი ტოლია $\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma$ (რატომ?).

§2.9.3 გამტარები ელექტრულ ველში

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა სისტემა შედგება ერთმანეთისგან იზოლირებული n რაოდენობის გამტარისგან. სტატიკურ შემთხვევაში გამტარის შიგნით

⁴მიახლოება მით უფრო კარგია როცა ფარდობა dx/\sqrt{A} მიიწრაფვის ნულისკენ

ველი არ გვაქვს, ვინაიდან გამტარი შედგება თავისუფალი მუხტებისგან და ველის არსებობის შემთხვევაში მუხტები დაწყებდნენ მოძრაობას ანუ დაირღვეოდა სტატიკა. sing Eq. (53) გვაძლევს რომ ასეთი სისტემისათვის

$$W = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (2.9.8)$$

სადაც Q_i და V_i i -ე გამტარზე არსებული მუხტი და პოტენციალია. ვინაიდან პოტენციალი მუხტის წრფივი ფუნქციაა (სუპერპოზიციის პრინციპი), გვექნება

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j. \quad (2.9.9)$$

p_{ij} პოტენციალური კოეფიციენტები ეწოდებათ. ეს კოეფიციენტები მუხტებისგან დამოუკიდებელია და დამოკიდებულია მხოლოდ გამტართა ფორმაზე და ურთიერთმდებარეობაზე. რომ დავრწმუნდეთ V_i სამართლიანობაში ამოცანას შევხედოთ ასე: ყოველ გამტარზე არსებულ წარმოქმნილ პოტენციალი შედგება Q_j მუხტის მქონე j -ე გამტარის მიერ შექმნილი პოტენციალებისგან როცა სხვა დანარჩენ გამტარებზე მუხტი ნულია. მაშინ ამ პოტენციალთა ჯამი გვაძლევს V_i . Eq. (62) განტოლების შებრუნებული განტოლება გამოსახავს Q_i როგორც V_j პოტენციალების წრფივ კომბინაციას,

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (2.9.10)$$

C_{ij} კოეფიციენტებს ტევადობის კოეფიციენტები ეწოდებათ; C_{ii} დიაგონალურ წევრების ტევადობები არადიაგონალურ წევრებს ელექტროსტატიკური ინდუქციის კოეფიციენტები. ცალკეული გამტარის ინდუქტივობა C_{ii} , რაც ტოლია ერთეულოვან პოტენციალის მქონე გამტარზე გამტარზე არსებული სრული მუხტისა, როცა სხვა გამტარებზე პოტენციალი ნულია.

მაგალითად თუ გვაქვს ორი გამტარი ტოლი და საპირისპირო ნიშნის მქონე მუხტებით ტევადობა განიმარტება როგორც ერთერთ გამტარზე არსებული მუხტის ფარდობა ამ ორ გამტარს შორის არსებულ პოტენციალთა სხვაობასთან, როცა ყველა სხვა გამტარზე პოტენციალი ნულია.

$$\begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (2.9.11)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} C_{22} & -C_{21} \\ -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \quad (2.9.12)$$

ტევადობა $C(1, 2) = Q/|V_1 - V_2|$ კი იქნება

$$C(1, 2) = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)/(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}). \quad (2.9.13)$$

გამტარების სისტემის ენერგია შეიძლება ჩავწეროთ პოტენციალებით და C_{ij} კოეფიციენტების საშუალებით

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij} V_i V_j. \quad (2.9.14)$$

§2.10 პოტენციალი და გრინის ფუნქცია

ხშირ შემთხვევაში ჩვენ ვიცით მუხტის განაწილება $\rho(\mathbf{x})$ რაღაც სასრულ მოცულობაში V (ან სასრულ ზედაპირზე S ან წირზე l) და საპოვნელია პოტენციალი სივრცის ნებისმიერ წერტილში. მეორე ტიპის ამოცანაა: ვიცით $\phi(\mathbf{x})$ სასრულ არეში და უნდა ვიპოვნოთ პოტენციალი მთელ სივრცეში. ამ ამოცანების ამოსახსნელად ერთერთი მეთოდია გრინის ფუნქციათა მეთოდი თავისუფალ სივრცეში გრინის ფუნქციაა

$$G_{free}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.10.1)$$

შესაბამისი პოტენციალით

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_V dV' G_{free}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'). \quad (2.10.2)$$

$G_{free}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ წარმოადგენს პოტენციალს \mathbf{x} წერტილში, ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტისათვის \mathbf{x}' წერტილში. როცა გვაქვს მუხტის განაწილება $\rho(\mathbf{x})$ ვღებულობთ ზემოთ მოყვანილ ინტეგრალს.

§2.10.1 გრინის თეორემა

გავიხსენოთ დივერგენციის თეორემა \mathbf{A} ვექტორული ველისათვის:

$$\int_V dV [\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] = \int_S ds [\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] \quad (2.10.3)$$

სადაც S V მოცულობის შემომსაზღვრავი ზედაპირია. განვიხილოთ შემთხვევა როცა $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x})$; სადაც $\phi(\mathbf{x})$ და $\nabla \psi(\mathbf{x})$ ნებისმიერი ფუნქციებია. მაშინ გვექნება:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) \quad (2.10.4)$$

და

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) [\mathbf{n} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x})] = \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (2.10.5)$$

სადაც $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ არის ψ ფუნქციის წარმოებული ზედაპირიდან გარეთ მიმართული ნორმალის გასწვრივ. დივერგენციის თეორემაში ჩასმა მოგვცემს

$$\int_V dV [\nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x})] = \int_S ds \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (2.10.6)$$

რაც ცნობილია გრინის პირველი იგივეობის სახელწოდებით. შევუცვალოთ $\psi(\mathbf{x})$ და $\phi(\mathbf{x})$ ადგილები. მაშინ $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x})$ და გვექნება

$$\int_V dV [\nabla\psi(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x})\nabla^2\phi(\mathbf{x})] = \int_S ds \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial n}. \quad (2.10.7)$$

გამოვაკლოთ ზედა იგივეობა ამ შედეგს და მივიღებთ

$$\int_V dV [\phi(\mathbf{x})\nabla^2\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\nabla^2\phi(\mathbf{x})] = \int_S ds \left[\phi(\mathbf{x}) \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial n} - \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial n} \right]$$

რაც წარმოადგენს გრინის მეორე იგივეობას, რაც ცნობილია ასევე გრინის თეორემის სახელით.

§2.10.2 გრინის თეორემის გამოყენება

ავიღოთ ფუნქციები ქვემოთ მოყვანილი წესით და საინტეგრაციო ცვლადად ავიღოთ \mathbf{x}' :

$$\phi(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{x}') \text{ და } \psi(\mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \equiv 1/R. \quad (2.10.8)$$

მეორე ფუნქციაში, \mathbf{x} არის წერტილი სადაც ვეძებთ პოტენციალს

გრინის თეორემაში ჩასმა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \int_V dV' [\Phi(\mathbf{x}')\nabla'^2(1/R) - (1/R)\nabla'^2\Phi(\mathbf{x}')] &= \\ &= \int_S ds' \left[\Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial(1/R)}{\partial n'} - \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

ანუ

$$-4\pi\Phi(\mathbf{x}) + 4\pi k \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int_S ds' \left[\Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial(1/R)}{\partial n'} - \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right]$$

სადაც დაეუშვით რომ \mathbf{x} მდებარეობს V შიგნით. ცვლადების გადალაგებით გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \left[\frac{1}{R} \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial(1/R)}{\partial n'} \right] \end{aligned} \quad (2.10.10)$$

პირველი წევრი წარმოადგენს მოცულობით ინტეგრალს მუხტის სიმკვრივით, მაგრამ არა მთელ სივრცეში. $\Phi(\mathbf{x})$ პოტენციალში წილი შეაქვს ზედაპირულ მუხტებსაც რაც აღიწერება მეორე წევრით. აღსანიშნავია რომ თუ \mathbf{x} წერტილი მოცულობის გარეთაა, მაშინ მარცხენა მხარე ნულია. თუ V წარმოადგენს მთელ სივრცეს და S არის უსასრულობაში მაშინ შესაბამისი ზედაპირული წევრი ნულია და გვრჩება მხოლოდ მოცულობითი წევრი მთელ სივრცეში. ასევე თუ $\rho(\mathbf{x}') = 0$ ყოველი \mathbf{x}' – თვის V მოცულობაში, მაშინ პოტენციალი განისაზღვრება ზედაპირული ინტეგრალით და Φ -ის წარმოებულთ ნორმალის გასწვრივ.

§2.10.3 გრინის თეორემა და სასაზღვრო პირობები

გვაქვს ორი ტიპის ამოცანა ვიციტ მუხტის მოცულობითი განაწილება და საძიებელია $\Phi(\mathbf{x})$. ან ვიციტ $\Phi(\mathbf{x}')$ ან $\partial\Phi(\mathbf{x}')/\partial n'$ S ზედაპირზე. არაა აუცილებელი ვიცოდეთ სამივე სიდიდე ზედაპირზე. როცა მოცემულია Φ საზღვარზე ამბობენ რომ გვაქვს ამოცანა დირიხლეს სასაზღვრო პირობით; როცა მოცემულია Φ წარმოებული საზღვარზე ნორმალის გასწვრივ მაშინ გვაქვს ნეიმანის სასაზღვრო პირობა. შესაძლებელია ასევე ერთ ნაწილზე გვექონდეს დირიხლეს ხოლო მეორეზე ნეიმანის პირობა- შერეული სასაზღვრო პირობა.

მოცემულია	სასაზღვრო პირობა
$\Phi(\mathbf{x}')$ მოცემულია S ზე	დირიხლე
$\partial\Phi(\mathbf{x}')/\partial n'$ მოცემულია S ზე	ნეიმანი
$\Phi(\mathbf{x}')$ მოცემულია S ერთ ნაწილზე $\partial\Phi(\mathbf{x}')/\partial n'$ დანარჩენ ნაწილზე	შერეული

§2.10.4 ამონახსენის ერთადერთობა და სასაზღვრო პირობები

ვაჩვენოთ რომ $\Phi(\mathbf{x}')$ ან მისი წარმოებულის ცოდნა S ზედაპირზე ნორმალის გასწვრივ საკმარისია პუასონის განტოლების

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0 \tag{2.10.11}$$

ამონახსენის საპოვნელად და ეს ამონახსენი ერთადერთია. ვთქვათ მოცემულია მუხტის სიმკვრივე S ზედაპირით შემოსაზღვრულ V მოცულობაში. მნიშვნელობა არ აქვს რა სასაზღვრო პირობაა მოცემული, დავუშვათ რომ გვაქვს ორი განსხვავებული ამონახსენი Φ_1 და Φ_2 . განვიხილოთ $U = \Phi_1 - \Phi_2$. ეს ფუნქცია

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = 0 \text{ } V \text{ შიგნით} \tag{2.10.12}$$

და

$$\begin{aligned} \text{ან } U(\mathbf{x}) &= 0, & \text{როცა } \mathbf{x} \in S \text{ (დირიხლე)} \\ \text{ან } \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} &= 0, & \text{როცა } \mathbf{x} \in S \text{ (ნეიმანი)}. \end{aligned} \tag{2.10.13}$$

გრინის პირველ იგივეობაში (2.10.6), დავუშვათ $\psi = \phi = U$. მაშინ:

$$\int_V dV [U(\mathbf{x})\nabla^2 U(\mathbf{x}) + \nabla U(\mathbf{x}) \cdot \nabla U(\mathbf{x})] = \int_S ds U(\mathbf{x}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n}. \tag{2.10.14}$$

ვინაიდან U აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას პირველი წევრი ფრჩხილებში ნულია. სასაზღვრო პირობიდან(ნეიმანის ან დირიხლეს) გამომდინარეობს რომ მარჯვენა მხარეც ნულია. ანუ გვრჩება მხოლოდ

$$\int_V dV |\nabla U(\mathbf{x})|^2 = 0 \tag{2.10.15}$$

საიდანაც $\nabla U(\mathbf{x}) = 0$ V მოცულობაში. ამგვარად $U(\mathbf{x})$ მუდმივია V მოცულობაში და ორი ამონახსენი Φ_1 და Φ_2 განსხვავდებიან მხოლოდ მუდმივით. დირიხლეს სასაზღვრო პირობისთვის ეს მუდმივა ნულია ვინაიდან ორივე ფუნქცია ერთი და იგივეა საზღვარზე. ნეიმანის სასაზღვრო პირობისთვის კი ეს მუდმივა ნებისმიერი, რაც ნიშნავს რომ გვაქვს თავისუფლება ავირჩიოთ ნულოვანი პოტენციალი.

ეს დამტკიცება ასევე სამართლიანია შერეული სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში, ვინაიდან ამ შემთხვევაშიც ნულდება ზედაპირული ინტეგრალი. არაა აუცილებელი ორივე $\Phi(\mathbf{x})$ ან $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ მოცემული იყოს ყველგან S ზედაპირზე (კომის სასაზღვრო პირობა); ერთი პირობა საკმარისია ერთადერთი ამონახსენის საპოვნელად. უფრო მეტიც, არ არსებობს ამოხსნა როცა ორივე პირობა ერთდროულად ედება საზღვარზე.

§2.10.5 გრინის ფუნქცია და სასაზღვრო პირობები

პუასონის და ლაპლასის განტოლების ამოხსნა შეიძლება ვიპოვნოთ გრინის თეორემის (2.10.8) და გრინის ფუნქციის საშუალებით. (2.10.10) განტოლების გამოყვანისას ($\Phi(\mathbf{x})$ განტოლებაში არაა ამოხსნა არამედ ეს ტოლობა წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებას) $\psi(\mathbf{x}')$ ფუნქციად აღებული გვექონდა $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას (2.7.4):

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

და წარმოადგენს წერტილოვანი მუხტის გრინის ფუნქციას. ეს ფუნქცია არაა ერთადერთი არამედ განსაზღვრულია ისეთი ადიტიური ფუნქციის სიზუსტით რომელიც აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას. ანუ გვაქვს

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{2.10.16}$$

სადაც $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \tag{2.10.17}$$

\mathbf{x} და $\mathbf{x}' \in V$. $\psi(\mathbf{x}')$ ფუნქციად თუ ავიღებთ ასეთი წესით განმარტებულ გრინის ფუნქციას გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] \end{aligned} \tag{2.10.18}$$

ეხლა ამოცანა დაიყვანება ისეთ გრინის ფუნქციის პოვნაზე რომელიც მოცემული სასაზღვრო პირობისათვის (??) განტოლებაში ზედაპირულ ინტეგრალში დაგვრჩება ან მხოლოდ პოტენციალი ზედაპირზე ან მხოლოდ პოტენციალის წარმოებული ნორმალის გასწვრივ.

გრინის თეორემა დირიხლეს სასაზღვრო პირობით

ამ შემთხვევაში ვეძებთ ისეთ გრინის G_D ფუნქციას რომელიც ზედაპირზე ტოლია ნულისა. მაშინ პოტენციალის წარმოებულნი წევრი ზედაპირულ ინტეგრალში აღარ გვექნება:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') - \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{x}')$$

ამ განტოლებაში $\Phi(\mathbf{x}')$ მოცემული გვაქვს S -ზე. ასევე ცნობილია მუხტის განაწილება მოცულობაში. ასე რომ ტოლობა უკვე წარმოადგენს არა ინტეგრალურ განტოლებას არამედ პუასონის განტოლების ამოხსნას. ანუ პოტენციალის პოვნის ამოცანა შეიცვალა გრინის ფუნქციის პოვნის ამოცანით: არსებობს თუ არა ისეთი $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ რომლისთვისაც

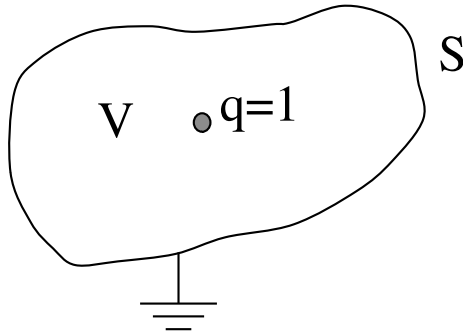
$$\nabla^2 G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V \tag{2.10.19}$$

და

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|_{\mathbf{x}' \in S} = 0? \tag{2.10.20}$$

პასუხი დადებითია. ასეთი $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ არსებობს და ის ერთადერთია. ეს ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამოხსნას:

ვიცით, რომ პოტენციალი თავისუფალი V მოცულობის შემოღობულ გრენ S მეტალის ზედაპირზე ნულია (ამით ზედაპირული ინტეგრალი იგივეურად ნულია). ამ მოცულობაში იმყოფება ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტი \mathbf{x}' წერტილში. იხ. სურ 2.3 ($\rho(\mathbf{x}')$ გადაიტყვევა დელტა ფუნქციად).



სურ 2.3: დირიხლეს ამოცანა

აღსანიშნავია რომ დირიხლეს ამოცანისთვის $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ სიმეტრიულია \mathbf{x}, \mathbf{x}' ცვლადების მიმართ. ასევე დამოკიდებულია გეომეტრიაზე.

§2.10.6 გრინის თეორემა და ნეიმანის სასაზღვრო პირობა.

ერთი შეხედვით ნეიმანის სასაზღვრო პირობისათვის G შეგვიძლია დავადოთ პირობა $\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/\partial n' = 0$ როცა $\mathbf{x}' \in S$. მაშინ გრინის თეორემის გამოყენება მოგ-

გვეს

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2.10.21)$$

მაგრამ ასეთი G ფუნქცია არ არსებობს. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ გაუსის თეორემას

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S ds' \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = \\ &= \int_S ds' [\mathbf{n}' \cdot \nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] = \int_V dV' \nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \end{aligned} \quad (2.10.22)$$

ანუ შეუძლებელია G ჰქონდეს ნულის ტოლი წარმოებული ნორმალის გასწვრივ ყველგან S ზედაპირზე. ამიტომ საჭიროა დავადოთ სხვა პირობა. უმარტივესი პირობა კი იქნება:

$$\left. \frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{x}' \in S} = -\frac{4\pi}{S} \quad (2.10.23)$$

სადაც S ზედაპირის ფართობია. ასეთი გრინის ფუნქციისათვის გრინის თეორემიდან გვექნება:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = &< \Phi >_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \end{aligned}$$

სადაც $< \Phi >_S$ არის საშუალო პოტენციალი S ზედაპირზე,

$$< \Phi >_S \equiv \frac{1}{S} \int_S ds' \Phi(\mathbf{x}') \quad (2.10.24)$$

ეს ნიშნავს რომ ამოცანა ნეიმანის სასაზღვრო პირობით შეიძლება ამოხსნილ იქნას რაღაც მუდმივის სიზუსტით, რაც ნიშნავს, რომ გვაქვს თავისუფლება ავირჩიოთ ნულოვანი პოტენციალის მქონე ზედაპირი.

ელექტროსტატიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები

ამ თავში განხილული იქნება ელექტროსტატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. კერძოდ, გამოსახულების მეთოდი, გრინის ფუნქციათა მეთოდი, ცვლადთა განცალბება და ორთოგონალურ ფუნქციებად გაშლის მეთოდები.

§3.1 გამოსახულების მეთოდი

მარტივი გეომეტრიის შემთხვევაში პოტენციალის, ველის, გრინის ფუნქციის საპოვნელად მოსახერხებელია გამოსახულების მეთოდი. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ლაპლასის (ან პუასონის) განტოლება რაღაც სასაზღვრო პირობით. თუ ამ ამოცანას შევცვლით მეორე, სხვა ამოცანით ისეთით რომ კვლავ სრულდება სასაზღვრო პირობები და მიღებული პასუხი აკმაყოფილებს ლაპლასის (ან პუასონის) განტოლებას, მაშინ ამოხსნის ერთაედრობიდან გამომდინარე ეს ყოფილა პირველი ამოცანის ამონახსენი.

ეს მეთოდი ასევე საშუალებას იძლევა ვიპოვნოთ გრინის ფუნქცია მარტივი (რას ვგულისხმობთ ამ სიტყვაში ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში გახდება ცხადი) გეომეტრიის შემთხვევაში. განვიხილავთ მხოლოდ გამტარ (ეკვიპოტენციალური) ელექტრულად იზოლირებულ შემომსაზღვრელ ზედაპირებს სასაზღვრო პირობით $\Phi(\mathbf{x}) = \text{const}$ ამ ზედაპირზე.

გავიხსენოთ ელექტროსტატიკური ამოცანა: გვაქვს სასრული V მოცულობა რომელშიც მოცემულია მუხტის განაწილება და მოცემულია პოტენციალი მის შემომსაზღვრელი S ზედაპირზე. ამოცანაა ვიპოვნოთ პოტენციალი (ველის დაძაბულობა) სივრცეში. გამოსახულების მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში, რომ ეს პოტენციალი (ველი) იქნება იგივე V ში თუ სადმე V გარეთ მოცემული იქნება ისეთი მუხტის განაწილება, რომელიც შემომსაზღვრელ S ზედაპირზე უზრუნველყოფს პირველადი ამოცანის სასაზღვრო პირობაში მოცემული პოტენციალის არსებობას.

ანუ გვაქვს ორი განსხვავებული ამოცანა. ერთი "რეალური" რომელშიც ფიგურირებს რეალური მუხტის განაწილება და სასაზღვრო პირობა და "ფიქტიური" რომელშიც ფიგურირებს რაღაც "ფიქტიური" მუხტის განაწილება, სადაც სხვაგან V გარეთ და ისეთი რომ საზღვარზე პოტენციალი აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას. ამ მეორე ამოცანით მიღებული ამონახსენი ძალაშია V მოცულობისათვის ანუ იმ არისთვის სადაც გვაქვს "რეალური" მუხტების განაწილება, მაგრამ არა სხვაგან ანუ V გარეთ.

ვთქვათ რაღაც წესით ვიპოვნეთ ასეთი "ფიქტიური" მუხტების (ასეთ მუხტებს გამოსახულება მუხტებს უწოდებენ) განაწილება მაშინ პოტენციალი მოიცემა კულონის კანონით:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho_2(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.1.1)$$

სადაც ρ_2 სრული მუხტის სიმკვრივეა მეორე ამოცანაში (ანუ რეალური და გამოსახულება მუხტების სიმკვრივეთა ჯამი).

როგორ მუშაობს გამოსახულების მეთოდი ამას განვიხილავთ ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში.

§3.2 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი და უსასრულო დამიწებული სიბრტყე

ვთქვათ, მოცემულია წერტილოვანი მუხტი q წერტილში კოორდინატებით დეკარტის საკოორდინატო სისტემაში $\mathbf{x}_0 = (0, 0, a)$ ასევე გვაქვს დამიწებული უსასრულო გამტარს უჭირავს $z < 0$ სივრცე, ანუ გვაქვს დირიხლეს ამოცანა $z = 0$ სიბრტყეზე სადაც $\Phi(x, y, 0) = 0$. ასევე, $\Phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ როცა $r \rightarrow \infty$. ამოცანა ვიპოვნოთ პოტენციალი $z > 0$ არეში. გამოსახულების მეთოდთ ამ ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს, სადაც $z < 0$ ნახევარსივრცეში უნდა მოვათავსოთ მუხტი (ან მუხტები) ისეთი და ისეთ ადგილას რომ ამ და \mathbf{x}_0 ში არსებული რეალური მუხტის მიერ შექმნილი პოტენციალი გვაძლევდეს ნულოვან პოტენციალს $z = 0$ სიბრტყეზე. ადვილი მისახვედრია რომ ამისათვის გამოსახულება მუხტს უნდა ჰქონდეს საპირისპირო ნიშანი ანუ უნდა იყოს $-q$, ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე გამოსახულება მუხტი უნდა მდებარეობდეს სიმეტრიულად რეალური მუხტის მიმართ სიბრტყის მეორე მხარეს ანუ $\mathbf{x}'_0 = (0, 0, -a)$ წერტილში.

ამგვარად

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|} \right] \quad (3.2.1)$$

ეს ფუნქცია მართლაც აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას $z > 0$ არეში და აკმაყოფილებს ამოცანის სასაზღვრო პირობას $z = 0$ სიბრტყეზე. ამოხსნის ერთადერთობიდან გამომდინარე (3.2.1) ყოფილა ჩვენს მიერ დასმული ამოცანის ამონახსენი. აღსანიშნავია რომ ეს ფუნქცია არაა ამონახსენი, როცა $z < 0$; ამ შემთხვევაში პოტენციალი ნულია ვინაიდან სივრცის ეს ნაწილი წარმოადგენს გამტარს.

რეალურ სისტემებში არსებობს მუხტის ზედაპირული სიმკვრივე $\sigma(x, y)$ გამტარის ზედაპირზე. მის საპოვნელად საჭიროა ელექტრული ველის ნორმალური კომ-

პონენეტის პოვნა ზედაპირზე:

$$E_n(x, y, 0) = - \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.2.2)$$

სადაც $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. ზედაპირული მუხტის სიმკვრივეს ვიპოვნით გამტარი—ჰაერი სასაზღვრო პირობიდან $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

ამ მაგალითიდან ჩანს თუ რას ნიშნავს ტერმინი "გამოსახულების მეთოდი". "მუხტი გამოსახულება"— ესაა რეალური მუხტის სარკული ანარეკლი $z = 0$ სიბტყის მიმართ და ზოგადად გამტარი კედლის მიმართ. საინტერესოა რომ თუ გვაქვს სფერული სიმეტრია მაშინ მხოლოდ ერთი მუხტი გამოსახულება საკმარისია ამოცანის ამოსახსნელად. არის შემთხვევები როცა გამოსახულება მუხტების უსასრულო რაოდენობაა საჭირო. წერტილოვანი მუხტის შემთხვევაში პოტენციალთან ერთად მიიღება გრინის ფუნქციაც. მაგალითად ჩვენს მიერ სიბტყე — ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტი დირიხლეს ამოცანისთვის $z > 0$ ნახევარსივრცისთვის გრინის ფუნქცია იქნება.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|} \right) \quad (3.2.3)$$

სადაც \mathbf{x}'_i წარმოადგენს \mathbf{x}' სარკულ გამოსახულებას $z = 0$ სიბტყის მიმართ. ასევე q მუხტი სკალირებულია $4\pi\epsilon_0$ რომ გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (2.7.4) განტოლებას (იხ. გვ. 25). ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია ამოვხსნათ პოტენციალის ამოცანა ნებისმიერი $\rho(\mathbf{x})$ განაწილებისათვის $z > 0$ არეში და ნებისმიერი პოტენციალისათვის $\Phi(x, y, 0)$ საზღვარზე $z = 0$.

§3.3 ამოცანა: წერტილოვანი მუხტი რამდენიმე გამტარ სიბტყეს შორის

ზემოთ მოყვანილი ამოცანის განზოგადება იქნება წერტილოვანი მუხტი გადამკვეთ გამტარ სიბტყეებს შორის. განვიხილოთ ორი გამტარი სიბტყე რომელიც იკვეთება 60° კუთხით. გადაკვეთის წერტილის მიმართ (ρ, ϕ, z) წერტილში მოთავსებულია წერტილოვანი მუხტი Q . ამ ამოცანის ამოსახსნელად უნდა მოვათავსოთ გამოსახულება მუხტები ისე რომ დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობა. ამისათვის საჭიროა ხუთი გამოსახულება მუხტი როგორც ეს აღნიშნულია ზემოთ სურ. ?? მათ აქვთ იგივე ρ და z კოორდინატი რაც აქვს რეალური მუხტს, (2.7.4) 25 ხოლო აზიმუტალური კუთხეები მოცემულია ცხრილში 3.1.

დავალება

დავალება 3.1 გამოთვალეთ E, Φ, σ

მუხტი	კუთხე
-Q	$\frac{2\pi}{3} - \phi$
+Q	$\frac{2\pi}{3} + \phi$
-Q	$-\frac{2\pi}{3} - \phi$
+Q	$-\frac{2\pi}{3} + \phi$
-Q	$-\phi$

ცხრილი 3.1: გამოსახულების მეთოდი. მუხტი გამტარ სიბრტყეებს შორის

§3.4 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი დამიწებული გამტარი სფეროს შიგნით

განვიხილოთ წერტილოვანი q მუხტი გამტარი a რადიუსის მქონე სფეროს შიგნით. საპოვნელია ველი სფეროს შიგნით და მუხტის განაწილება სფეროს ზედაპირზე (ვთვლით რომ სფეროს ზედაპირის სისქე უსასრულოდ მცირეა) სფეროს ცენტრი მოთავსებულია საკოორდინატო სისტემის სათავეში. სფეროს ცენტრსა და მუხტს შორის მანძილი ავლნიშნოთ r_0 . ანუ მუხტის კოორდინატია $\mathbf{x}_0 = r_0 \mathbf{n}_0$, სადაც \mathbf{n}_0 ერთეულოვანი ვექტორია ცენტრიდან მუხტის მიმართულებით.

ეხლა ამოცანაა შემოვიტანოთ ისეთი გამოსახულება q' მუხტი (ვნახავთ რომ ერთი მუხტი საკმარისი) რომელიც უზრუნველყოფს სასაზღვრო პირობას სფეროს ზედაპირზე. ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე ასეთი მუხტი უნდა მდებარეობდეს სფეროს ცენტრის და სფეროს შიგნით არსებული მუხტის შემაერთებელ წრფეზე. ვთქვათ ამ მუხტის კოორდინატებია $\mathbf{x}'_0 = r'_0 \mathbf{n}_0$. ამ ორი მუხტის მიერ შექმნილი პოტენციალი იქნება

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|} \quad (3.4.1)$$

ეხლა უნდა შევარჩიოთ q' და r'_0 ისე, რომ $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ როცა \mathbf{x} არის სფეროს ზედაპირზე, ანუ $\mathbf{x} = a\mathbf{n}$, სადაც \mathbf{n} ნებისმიერი ერთეულოვანი ვექტორია. ასეთ წერტილში პოტენციალი შეიძლება ჩავწეროთ ასე

$$\Phi(a\mathbf{n}) = \frac{q/a}{|\mathbf{n} - (r_0/a)\mathbf{n}_0|} + \frac{q'/r'_0}{|\mathbf{n}_0 - (a/r'_0)\mathbf{n}|}. \quad (3.4.2)$$

საიდანაც ჩანს, რომ მნიშვნელები ტოლია როცა $r_0/a = a/r'_0$, და მრიცხველები ტოლია როცა $q/a = -q'/r'_0$. (არის სხვა "ამონახსენიც", როცა $r'_0 = r_0$ და $q' = -q$ მაგრამ ეს არაა ამონახსენი ვინაიდან ასეთი გამოსახულება მუხტი იქნება მოცულობის შიგნით და გააბათილებს ნამდვილ მუხტს. ჩვენ უნდა გვქონდეს $r'_0/a > 1$) ამგვარად ჩვენ შეგვიძლია Φ ნულის ტოლობას S საზღვარზე შეგვიძლია მივალწიოთ როცა

$$r'_0 = a^2/r_0 \text{ და } q' = -q(a/r_0) \quad (3.4.3)$$

და მოცემული ამოცანისთვის პოტენციალს (სფეროზე ეკვიპოტენციალური ზედა-

პირით) ექნება სახე:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{a/r_0}{|\mathbf{x} - (a^2/r_0^2)\mathbf{x}_0|} \right] \quad (3.4.4)$$

ეს ნიშნავს, რომ ვიცით გრინის ფუნქციის სახეც a რადიუსის სფეროსთვის:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a/r}{|\mathbf{x}' - (a^2/r^2)\mathbf{x}|}. \quad (3.4.5)$$

როცა მუხტი იმყოფება დამიწებული სფეროს გარეთ, ამოხსნა იგივეა ოდნდ რეალური და გამოსახულება მუხტი იცვლიან ადგილებს. მიღებული შედეგები $\Phi(\mathbf{x})$ და $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ სამართლიანია გარდა იმ შემთხვევისა როცა r , r_0 , და r' ყველა მეტია აზე.

ვიცით რა პოტენციალი შეგვიძლია გავიგოთ მუხტის განაწილება სფეროს ზედაპირზე. $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ განმარტებიდან და სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე იგი ტოლია

$$\sigma = -\epsilon_0 E_r = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (3.4.6)$$

z -მიემართოთ \mathbf{n}_0 გასწვრივ, მაშინ

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta)^{1/2}} - \frac{(a/r_0)}{(r^2 + (a^4/r_0^2) - 2r(a^2/r_0) \cos \theta)^{1/2}} \right] \quad (3.4.7)$$

θ პოლარული კუთხეა z -ღერძსა (რაც იგივეა \mathbf{x}_0 -სა) და \mathbf{x} შორის. მაშინ ველის რადიალური კომპონენტი $r = a$ სფეროს ზედაპირზე ტოლია

$$\begin{aligned} E_r &= - \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial r} \right|_{r=a} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[-\frac{1}{2} \frac{2a - 2r \cos \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{r_0} \frac{1}{2} \frac{2a - 2(a^2/r_0) \cos \theta}{(a^2 + (a^4/r_0^2) - 2(a^3/r_0) \cos \theta)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{a - r_0 \cos \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_0^2}{a^2} \frac{a - (a^2/r_0) \cos \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left[\frac{1 - r_0^2/a^2}{(1 + (r_0^2/a^2) - 2(r_0/a) \cos \theta)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\delta = r_0/a$, მაშინ მუხტის ზედაპირული სიმკვრივე იქნება

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1 - \delta^2}{(1 + \delta^2 - 2\delta \cos \theta)^{3/2}} \quad (3.4.9)$$

სრული ზედაპირული მუხტი შეგვიძლია ვიპოვნოთ σ ზედაპირზე ინტეგრებით, მაგრამ გაცილებით ადვილია მისი გამოთვლა გაუსის კანონით; თუ ვაინტეგრებთ $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ნორმალური კომპონენტს ჩაკეტილ ზედაპირზე რომელიც მოიცავს გამტარს მივიღებთ ნულს ვინაიდან ველი გამტარში ნულია.

$$0 = \int_S ds \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = Q/\epsilon_0 = \left(q + \int_S ds \sigma \right) / \epsilon_0$$

რაც ნშნავს რომ ინდუცირებული მუხტი არის $-q$. მართლაც, ავიღოთ ზედაპირული ინტეგრალი მუხტის სიმკვრივით. გვექნება:

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_S ds \sigma(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{q}{2} (1 - \delta^2) \int_{-1}^1 \frac{du}{(1 + \delta^2 - 2\delta u)^{3/2}} = \\ &= -\frac{q}{2} \frac{1 - \delta^2}{2\delta} \left[\frac{2}{(1 + \delta^2 - 2\delta)^{1/2}} - \frac{2}{(1 + \delta^2 + 2\delta)^{1/2}} \right] = \\ &= -\frac{q}{2} \frac{1 - \delta^2}{\delta} \left(\frac{1}{1 - \delta} - \frac{1}{1 + \delta} \right) = -q \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

აღსანიშნავია რომ, $|\sigma|$ აქვს მაქსიმუმი \mathbf{n}_0 გასწვრივ

$$|\sigma_{\max}| = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1 + \delta}{(1 - \delta)^2} \quad (3.4.11)$$

საპირისპირო მიმართულებით კი მინიმუმი:

$$|\sigma_{\min}| = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1 - \delta}{(1 + \delta)^2} \quad (3.4.12)$$

ასევე შეგვიძლია გამოვთვალოთ **მუხტზე მოქმედი სრული ძალა** ეს იგივეა რაც გამტარზე მოქმედი ძალა საპირისპირო ნიშნით. ზედაპირზე ფართის ერთეულზე მოქმედი ძალა იქნება $2\pi\sigma^2$ და მიმართულია ნორმალის გაწვრივ გამტარიდან სი-ცარიელისკენ სფერულის სიმეტრიის გამო, მხოლოდ \mathbf{n}_0 მიმართული კომპონენტა

იქნება ნულისგან გასხვებული, გვექნება

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{F}_n| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \sigma^2(\theta) \cos\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi^2 a^2 q^2}{16\pi^2 a^4} (1-\delta^2)^2 \int_{-1}^1 \frac{u du}{(1+\delta^2-2\delta u)^3} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \frac{q^2}{a^2} (1-\delta^2)^2 \int_{-1}^1 \frac{u du}{(1+\delta^2-2\delta u)^3} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \frac{q^2}{a^2} (1-\delta^2)^2 \frac{1}{4\delta^2} \left[-\frac{1}{1+\delta^2-2\delta u} + \frac{1+\delta^2}{2(1+\delta^2-2\delta u)^2} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \frac{q^2}{a^2} \frac{(1-\delta^2)^2}{4\delta^2} \left[\frac{-1}{(1-\delta)^2} + \frac{1}{(1+\delta)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1+\delta^2}{2(1-\delta)^4} - \frac{1+\delta^2}{2(1+\delta)^4} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \frac{(1-\delta^2)^2}{4\delta^2} \left[\frac{-4\delta}{(1-\delta^2)^2} + \frac{(1+\delta^2)(8\delta+8\delta^3)}{2(1-\delta^2)^4} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \frac{-4\delta(1-\delta^2)^2 + 4\delta(1+\delta^2)^2}{4\delta^2(1-\delta^2)^2} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \frac{\delta}{(1-\delta^2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

ამ ძალის მიმართულება ისეთია რომ მუხტი მიიზიდება კედლების მხრიდან

ასევე შეგვიძლია გამოვთვალოთ ძალა მუხტსა და მის გამოსახულებას შორის. მათ შორის მანძილია $r'_0 - r_0 = a\delta(1/\delta^2 - 1) = a(1-\delta^2)/\delta$, ხოლო მუხტების ნამრავლი იქნება $qq' = -q^2/\delta$, კულონის კანონი მოგვცემს

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \frac{\delta}{(1-\delta^2)^2} \tag{3.4.14}$$

რაც იგივეა რაც ძალა მუხტსა და ზედაპირს შორის. არის თუ არა მუხტზე მოქმედი ძალა ყოველთვის ძალა მუხტსა და მის გამოსახულებას შორის? პასუხი დადებითია. უფრო მეტიც, ხშირად არა მხოლოდ მოსახერხებელი არამედ აუცილებელიცაა ძალის გამოთვლა სწორედ მუხტსა და გამოსახულება მუხტს შორის. მაგ. როცა გვინდა გამოვთვალოთ მუშაობა როემლიც საჭიროა იმისათვის, რომ მუხტი გადავაადგილოთ ერთი ადგილიდან მეორეში, უნდა გამოვიყენოთ გამოსახულება მუხტების მიერ შექმნილი პოტენციალი და არა ინდუცირებული მუხტების, ვინაიდან მუხტის მოძრაობისას იცვლება თავად ზედაპირზე ინდუცირებული მუხტების განაწილება.

ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები

§4.1 მაქსველის განტოლებები

§4.1.1 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.1.1\text{ა})$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.1.1\text{ბ})$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (4.1.1\text{გ})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (4.1.1\text{დ})$$

იზოტროპიული, ერთგვაროვანი, წრფივი გარემოსათვის ადგილი აქვს მატერიალურ განტოლებებს:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4.1.2\text{ა})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.1.2\text{ბ})$$

ამ შემთხვევაში (4.1.2) განტოლებების გათვალისწინებით მაქსველის (4.1.1) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.1.3\text{ა})$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.1.3\text{ბ})$$

$$\epsilon \text{div} \vec{E} = \rho \quad (4.1.3\text{გ})$$

$$\text{div} \vec{H} = 0 \quad (4.1.3\text{დ})$$

სადაც

- \vec{E} და \vec{H} ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობების ვექტორებია განზომილებებით [ვ/მ] და [ა/მ] .
- \vec{j} – დენის მოცულობითი სიმკვრივეა რომელიც ტოლია $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ სადაც σ გარემოს კუთრი გამტარებლობაა განზომილებით [ომ/მ]
- ϵ —გარემოს დიელექტრიკული შეღწევადობა [ფ/მ]. თავისუფალი გარემოსათვის (ვაკუუმი)

$$\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} \text{ფ/მ}$$

- μ —გარემოს მაგნიტური შეღწევადობა [ჰნ/მ]. თავისუფალი გარემოსათვის (ვაკუუმი)

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ჰნ/მ}$$

- ρ —მუხტის მოცულობითი სიმკვრივეა [კ/მ³].
- \vec{D} და \vec{B} ელექტრული წანაცვლების და მაგნიტური ინდუქციის ვექტორებია განზომილებებით [კ/მ²] და [ვბ/მ²] .

დროში ჰარმონიული ველის შემთხვევაში $\partial \vec{E} / \partial t = i\omega \vec{E}$ და $\partial \vec{H} / \partial t = i\omega \vec{H}$, მაშინ განტოლებები (4.1.3ა) და (4.1.3ბ) მიიღებენ სახეს:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + i\omega \epsilon \vec{E} \quad (4.1.4)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \quad (4.1.5)$$

თუ (4.1.4) გავითვალისწინებთ \vec{j} განმარტებას მივიღებთ

$$\text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon' \vec{E}$$

სადაც ϵ' არის ე.წ. კომპლექსური დიელექტრიკული შეღწევადობა

$$\epsilon' = \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega \epsilon} \right)$$

§4.1.2 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები მრუდწირულ კოორდინატებში

შინამდებარე საჭიროა ჩაიწეროს მაქსველის განტოლებები კომპონენტების სახით. ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე ხელსაყრელია ჩაიწეროს განტოლებები იმ კოორდინატა სისტემაში რა სიმეტრიაც ახასიათებს ამოცანას. მრუდწირული

კოორდინატების შესახებ იხ. დანართი ?? ??
მართკუთხა სააკოორდინატო სისტემა¹

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon' E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon' E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega\varepsilon' E_z\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega\mu H_z\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (4.1.8)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1.9)$$

ცილინდრული სააკოორდინატო სისტემა

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} &= i\omega\varepsilon' E_r \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= i\omega\varepsilon' E_\phi\end{aligned}\quad (4.1.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = i\omega\varepsilon' E_z \quad (4.1.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} &= -i\omega\mu H_r \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -i\omega\mu H_\phi\end{aligned}\quad (4.1.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = -i\omega\mu H_z \quad (4.1.13)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (4.1.14)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1.15)$$

¹იგულისხმება დროში პარმონიული შემთხვევა

სადაც E_r, E_ϕ, E_z და H_r, H_ϕ, H_z ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობის ვექტორების კომპონენტებია ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში.

სფერული საკოორდინატო სისტემა

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\phi \cos \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] &= -i\omega \epsilon' E_r \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \right] &= -i\omega \epsilon' E_\theta \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] &= -i\omega \epsilon' E_\phi \end{aligned} \quad (4.1.16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\phi \cos \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] &= i\omega \mu H_r \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] &= i\omega \mu H_\theta \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] &= i\omega \mu H_\phi \end{aligned} \quad (4.1.17a)$$

სადაც E_r, E_ϕ, E_θ და H_r, H_ϕ, H_θ ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობის ვექტორების კომპონენტებია სფერულ საკოორდინატო სისტემაში.

დავალება 1.1

გამოიყვანეთ დანართში მოყვანილი ფორმულების დახმარებით მაქსველის განტოლებები:

1. სფერული საკოორდინატო სისტემისთვის.
2. ცილინდრული საკოორდინატო სისტემისთვის.

§4.1.3 მაქსველის ინტეგრალური განტოლებები

მაქსველის ინტეგრალურ განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_F \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{F} = \int_F (\vec{j} + \vec{j}_{\text{წმ}}) d\vec{F} \quad (4.1.18a)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{F} \quad (4.1.18b)$$

სადაც \vec{j} და $\vec{j}_{\text{წმ}}$ გამტარობის და წანაცვლების დენის სიმკვრივეებია, რომლებიც განჭოლავენ ჩაკეტილ L კონტურს, რომელიც წარმოადგენს F ზედაპირის საზღვარს.

§4.1.4 მაგნიტური დენები და მუხტები

როგორც ამოცანის ამოსახსნელად მოსახერხებელია მაგნიტური დენების და მუხტების შემოტანა, მაშინ (4.1.3) მიიღებს სახეს

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.1.19a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{j}_{\text{მაგ}} - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.1.19b)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (4.1.19g)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \rho_{\text{მაგ}} \quad (4.1.19d)$$

მაგნიტური დენების და მუხტების შემოტანისას შესაბამისად შეიცვლება მაქსველის განტოლებები კომპონენტების ენაზე რომლებიც გამოყვანილ იქნა ზემოთ სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემებისთვის.

§4.1.5 უწყვეტობის განტოლებები

ელექტრულ მუხტსა და დენს შორის სივრცის

ანალოგიურად ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება: ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება: ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება:

როგორც წერტილში არსებობს დამოკიდებულება: ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება:

აქ ამბავი დიდი გარანტუასი. ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება: ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება: ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.1.20)$$

ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{მაგ}} + \frac{\partial \rho_{\text{მაგ}}}{\partial t} = 0 \quad (4.1.21)$$

ამ ფორმულებში თუ გავითვალისწინებთ (4.1.19) მოყვანილ მატერიალურ განტო-

ლებებს მივიღებთ:

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.1.22a)$$

$$\operatorname{div} \left(\vec{j}_{\text{მაგ}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.1.22b)$$

ფორმულები (4.1.22a) და (4.1.22b) ნიშნავს რომ სრული დენი რომელიც გადის მოცულობის ერთეულში ნულის ტოლია. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მაგნიტური წანაცვლების დენი.

წრფივი დენების შემთხვევაში (ანუ დენი მიედინება მხოლოდ ერთი მიმართულებით) (4.1.22a) და (4.1.22b) მიიღებენ სახეს:

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial z} + \frac{\partial \rho_{\text{წრ.}}}{\partial t} = 0 \quad (4.1.23a)$$

$$\frac{\partial \vec{I}_{\text{მაგ}}}{\partial z} + \frac{\partial \rho_{\text{წრ.მაგ}}}{\partial t} = 0 \quad (4.1.23b)$$

სადაც $\rho_{\text{წრ.}}$ და $\rho_{\text{წრ.მაგ}}$ ელექტრული და მაგნიტური მუხტების სიმკვრივეებია z გასწვრივ.

§4.2 ტალღური განტოლებები

მაქსველის განტოლებებიდან შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ტალღური განტოლებები:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon' \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mu \epsilon' \vec{E} \quad (4.2.1a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \epsilon' \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mu \epsilon' \vec{H} \quad (4.2.1b)$$

სადაც ∇^2 ლაპლასის ოპერატორია.

დავალება 1.2

გამოიყვანეთ ზემოთ მოყვანილი განტოლებები მაქსველის განტოლებებიდან

ტალღური განტოლებები (4.2.1a) და (4.2.1b) შეგვიძლია ჩავწეროთ სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემებში მსგავსად მაქსველის პირველი რიგის დიფ. განტოლებებისა. ლაპლასის ოპერატორს ამ საკოორდინატო სისტემებში აქვს შემდეგი სახე: **მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა:**

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (4.2.2)$$

ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა:

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (4.2.3)$$

სფერული საკოორდინატო სისტემა:

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\operatorname{tg} \theta}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad (4.2.4)$$

სადაც A შეიძლება იყოს არა მარტო ელექტრული ან მაგნიტური ვექტორული ველი არამედ ამ ველის რომელიმე კომპონენტიც მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში და E_z, H_z ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში.

(4.2.1a) და (4.2.1b) განტოლებების მარცხენა მხარე ახასიათებს ელექტრომაგნიტური ველის გეომეტრიულ სტრუქტურას, ხოლო მარჯვენა მხარე, ველის ცვლილებას დროში და წარმოადგენს სიხშირის ფუნქციას. ამგვარად ეს განტოლებები აჩვენებენ რომ ველის გეომეტრიული სტრუქტურა დამოკიდებულია სიხშირეზე. გამონაკლისს წარმოადგენენ TEM (განივი ელექტრომაგნიტური ველი) ტიპის ტალღები, რომელთა სტრუქტურა არაა დამოკიდებული სიხშირეზე.

§4.3 სასაზღვრო პირობები

ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე ადგილი აქვს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

1. ერთი გარემოდან მეორეში გადასვლილას ელექტრული ველის მხები (ტანგენცი-ალური, გასწვრივი) მდგენელი უწყვეტია. ვექტორული ფორმით ამ პირობას აქვს სახე

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad (4.3.1)$$

სადაც \vec{E}_1 და \vec{E}_2 ელექტრული ველებია პირველ და მეორე გარემოში, ხოლო \vec{n} ორი გარემოს გამყოფი ზედაპირის ნორმალია.

2. თუკი ერთ-ერთ გარემო იდეალური გამტარია ($\sigma = \infty$), მაშინ ველი მასში ვერ აღწევს და ამ შემთხვევაში:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 = 0 \quad (4.3.2)$$

3. თუ ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე არსებობს თავისუფალი ელექტრული მუხტები (ა თავისუფალი მუხტების ზედაპირული სიმკვრივეა), მაშინ \vec{D} ნორმალური მდგენელი განიცდის წყვეტას (ანუ ცვლება ნახტომისებურად):

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2 = q \quad (4.3.3)$$

როცა ერთი გარემო იდეალური გამტარია, მაშინ მასში ელექტრული ველის დაბა-ბულობა ნულია, მაშინ (4.3.3) მიიღებს სახეს:

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = q \quad (4.3.4)$$

4. ერთი გარემოდან მეორეში გადასვლისას \vec{B} ველის ნორმალური მდგენელი უწყვეტია:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2 \quad (4.3.5)$$

5. თუ ერთ-ერთი გარემო იდეალური გამტარია მაშინ \vec{B} და შესაბამისად \vec{H} ნორმალური მდგენელი ამ გარემოში ნულია და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = \vec{n} \cdot \vec{H}_1 = \vec{n} \cdot \vec{H}_2 = 0 \quad (4.3.6)$$

6. თუ ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე გვაქვს ელექტრული დენი მაშინ \vec{H} ($\vec{\sigma}$ ზედაპირული დენის სიმკვრივე) გასწვრივი მდგენელი განიცდის წყვეტას:

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 - \vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{\sigma} \quad (4.3.7)$$

როცა ერთ-ერთი(დავუშვათ მეორე) გარემო იდეალური გამტარია მაშინ

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{\sigma} \quad (4.3.8)$$

7. მაგნიტური მუხტების და დენების შემოტანის შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 - \vec{n} \times \vec{E}_2 = \vec{\sigma}_{\text{მაგ}} \quad (4.3.9a)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 - \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = \eta_{\text{მაგ}} \quad (4.3.9b)$$

სადაც $\vec{\sigma}_{\text{მაგ}}$ და $\eta_{\text{მაგ}}$ ზედაპირული მაგნიტური დენის და მაგნიტური მუხტის სიმკვრივეებია.

8. თუ ერთ-ერთი გარემო ხასიათდება დიდი მაგრამ სასრული გამტარებლობით მაშინ \vec{E} და \vec{H} მხები მდგენელები გარემოს გამყოფ ზედაპირზე ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი მიახლოებითი ტოლობით (ლენტოვიჩის სასაზღვრო პირობა):

$$\vec{n} \times \vec{E} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[\vec{n} \cdot (\vec{n} \times \vec{H}) \right] \quad (4.3.10)$$

§4.4 უმოვ-პოინტინგის თეორემა

მაქსველის განტოლებებიდან შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი ტოლობა:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV = \int_F \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dF + \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV \quad (4.4.1)$$

- ელექტრული ველის ენერჯიის სიმკვრივე
- მაგნიტური ველის ენერჯიის სიმკვრივე
- ზედაპირის ფართის ერთეულიდან გამომავალი ნაკადი
- მოცულობის ერთეულში შთანთქმული ენერჯია

სადაც dV მოცულობის (V) ელემენტია, dF კი V მოცულობის შემოღსაზღვრელი F ზედაპირის ელემენტი. (4.4.1) ცნობილია როგორც უმოვ-პოინტინგის თეორემა, რომელიც აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის ბალანსს. (4.4.1) ში მარცხენა მხარეს ინტეგრალქვეშა გამოსახულება წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის სრული ენერჯიის სიმკვრივეს, ხოლო თავად ინტეგრალი წარმოადგენს V მოცულობაში არსებულ ენერჯიას. — ნიშანი ნიშნავს რომ ენერჯია მოცულობაში მცირდება. ტოლობის მარჯვენა მხარეს არსებული გამოსახულება $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის ნაკადს. მას პოინტინგის ვექტორი ეწოდება. ხოლო $\vec{n} \cdot \vec{P}$ არის პოინტინგის ვექტორის ნორმალური მდგენელი.

ინტეგრალი $\int_F \vec{n} \cdot \vec{P} dF$ წარმოადგენს ენერჯიას რომელიც გაედინება მოცულობიდან დროის ერთეულში. მარცხენა მხარეს მეორე ინტეგრალი წარმოადგენს ენერჯიას რომელიც იხარჯება (სითბოს გამოყოფა, ველის წყაროებიდან მიღებული ენერჯია) ამ მოცულობაში დროის ერთეულში. უმოვ-პოინტინგის თეორემა შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: *რადაც მოცულობაში არსებული ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის ცვლილება ხდება ამ მოცულობიდან ენერჯიის გადინებით (გავრცელებით) და სისტემის შიგნით ხარჯვით.*

ზოგადად $\int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV$ შედგება ორი, დადებითი და უარყოფითი ნაწილისაგან. დადებითი ნაწილი წარმოადგენს ენერჯიას რომელიც გადადის სითბოში (ჯოულის სითბო), ხოლო უარყოფითი წარმოადგენს ამ მოცულობაში არსებული გარე ველის წყაროების მიერ წარმოებულ ენერჯიას. ანუ

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{გამტარობის}} - \vec{j}_{\text{გარე}}$$

სადაც $\vec{j}_{\text{გამტარობის}} = \sigma \vec{E}$. ამის გათვალისწინებით ბოლო ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV = \int_V \sigma E^2 dV - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{გარე}} dV \quad (4.4.2)$$

თუ (4.4.1) მარცხენა მხარეს არსებულ ინტეგრალს ავლნიშნავთ W -თი და გავითვალისწინებთ (4.4.2) ტოლობას მივიღებთ:

$$\int_V \vec{E} j_{\text{გარე}} dV = \frac{\partial W}{\partial t} + \int_V \sigma \vec{E}^2 dV + \int_F \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dF \quad (4.4.3)$$

რაც ნიშნავს: რაღაც მოცულობაში გარე წყაროების მიერ დროის ერთეულში წარმოებული ენერგია (ანუ სიმძლავრე) იხარჯება ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ცვლილებაზე, ჯოულის სითბოზე და ამ მოცულობიდან ელექტრომაგნიტური ველის გამოსხივებაზე. ამრიგად, უმოვ-პოინტინგის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ შესაძლებელია ელექტრომაგნიტური ველის გამოსხივება მოცულობიდან სადაც მდებარეობენ ველის წყაროები. (4.4.1) და (4.4.3) წარმოადგენენ სიმძლავრის ბალანსის განტოლებებს დროის მყისიერ მომენტში. ველის ჰარმონიულად ცვლილების შემთხვევაში ხშირად ოპერირებენ დროში (პერიოდის განმავლობაში) საშუალო სიდიდეებით. თუ გავითვალისწინებთ განტოლებაში შემავალი სიდიდეების კომპლექსურობას და გავასაშუალოებთ ორივე მხარეს პერიოდის განმავლობაში (4.4.3)დან მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \int_V \vec{E} j_{\text{გარე}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E} \vec{E}^* dV + \frac{1}{2} \text{Re} \int_F \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) dF \quad (4.4.4)$$

$\frac{\partial W}{\partial t}$ წევრი დროში გასაშუალოებისას ნულის ტოლია (სტაციონალური პროცესი), ხოლო "*" აღნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებას. "Re" ნიშნავს რომ აღებულ უნდა იქნას ინტეგრალქვეშა გამოსახულების რეალური ნაწილი. თუ ჩავთვლით რომ სისტემაში დანაკარგები მცირეა მაშინ (4.4.4) მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \int_V \vec{E} j_{\text{გარე}}^* dV = \frac{1}{2} \text{Re} \int_F \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) dF \quad (4.4.5)$$

რაც ნიშნავს რომ სისტემაში არსებული ველის წყაროებიდან გამოყოფილი ენერგია სრულად გამოსხივდება.

დისპერსიული ნივთიერებები

§5.1 შესავალი

ბევრ ამოცანაში შეიძლება მიღებულ იქნას ზუსტი პასუხი დაშვებით რომ ნივთიერების პარამეტრები მუდმივია და არაა სხვა სიდიდეებზე (სიხშირეზე, ველის მნიშვნელობაზე, ტემპერატურაზე) დამოკიდებული, მაგრამ ეს მხოლოდ მიახლოებაა. მაგალითად შეუძლებელია მუდმივი დიელექტრიკული შეღწევადობის მქონე უდანაკარგო ნივთიერება (გარდა რასაკვირველია თავისუფალი სივრცე). ასეთი ნივთიერება რომ არსებობდეს დაირღვეოდა მიზეზშედეგობრიობა (კრამერს კრონინგის იგივეობიდან გამომდინარე). არა ერთეულოვანი სკალარული შეღწევადობა ნიშნავს რომ მუხტის პოლარიზაცია ნივთიერებაში ხდება მყისიერად და პროპორციულია ელექტრული ველის. რეაქცია დამოუკიდებელია სიხშირეზე, დროზე, მიმართულებაზე ერთი და აიგივეა ყველა მიმართულებით, ელთი და აიგივე პროპორციულობის კოეფიციენტით ველის ყველა მნიშვნელობისთვის.

ყველა ეს დაშვება ცხადია აბსოლიტურად ზუსტი არაა ურთიერთობა $D(x)$ და $E(x)$ შორის შეიძლება იყოს არა სკალარზე გამრავლება არამედ ტენზორული ფუნქციაც. დიელექტრიკული შეღწევადობა შეიძლება ასევე იყოს არაწრფივი ფუნქციაც $E(x)$ მიმართ და შეიძლება იყოს დროზე დამოკიდებულიც (მაგ. იცვლება ტემპერატურის ცვლილებისას) და ცხადია შეიძლება იყოს კოორდინატზე დამოკიდებულაც.

როდესაც სინათლის სიჩქარე დამოკიდებულია სიხშირეზე ამბობენ რომ ადგილი აქვს დისპერსიას¹. დისპერსიას ასევე ადგილი აქვს როცა გვაქვს დანაკარგები (არანულოვანი გამტარებლობა), რაც გამოიხატება იმ ფაქტში, რომ ფაზურ კონსტანტა არაა სიხშირის მიმართ წრფივად პროპორციული. როცა შეღწევადობა ან მიმდებლობა არის სიხშირის ფუნქცია ნივთიერება არის დისპერსიული. დროზე ჰარმონიულად დამოკიდებულებისას შეღწევადობის სიხშირეზე დამოკიდებულება

¹რიცხვითი მეთოდებით ამოხსნისას ასევე ადგილი აქვს დისპერსიას, მაგრამ ეს რიცხვითი მეთოდის არტეფაქტია

შეიძლება დამოისახოს ფორმულით $\hat{D}(\omega) = \hat{\epsilon}(\omega)\hat{E}(\omega)$ სადაც $\hat{\epsilon}$ ნიშნავს, რომ საუბარია სიხშირულ არეში. ზემოთ მოყვანილი დამოკიდებულება სიხშირულ არეში ნიშნავს რომ დროით არეში გადასვლისას გვექნება კონვულსიური ფორმულა.

§5.2 მატერიალური განტოლებები და დისკრეტული გარემო

ელექტრული ველის ნაკადი და მაგნიტური ველი დაკავშირებულია ელექტრულ ველთან და მაგნიტური ველის ნაკადთან შემდეგი ფორმულებით

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (5.2.2)$$

სადაც where \mathbf{P} და \mathbf{M} გარემოში ინდუცირებული ელექტრული და მაგნიტური დიპოლებია. უნდა გვახსოვდეს რომ მუხტზე მოქმედი ძალა არის \mathbf{E} და \mathbf{B} ფუნქცია ასე რომ რაღაც აზრით \mathbf{E} და \mathbf{B} არიან „რეალური“ ველები. \mathbf{P} პოლარიზაციის ვექტორი ითვალისწინებს გარემოში ლოკალური ბმული მუხტების წანაცვლებას \mathbf{P} ისეა აგებული რომ მისი დამატება $\epsilon_0 \mathbf{E}$ ნიშნავს \mathbf{D} წვლილში ბმული მუხტების კომპენსაციას. ამ გზითგაუსის კანონში ტოლობაში მარჯვენა მხარეს გვაქვს თავისუფალი მუხტები და გაუსის კანონი სამართლიანია იმის მიუხედავად ნივთიერება გვაქვს თუ არა.

მაგნიტურ ველისთვის \mathbf{M} იწვევს იმას რომ ამპერის კანონში მონაწილეობენ მოძრავი თავისუფალი მუხტები და წანაცვლების დენი და მოძრავი ბმული მუხტებით გამოწვეული ეფექტი არ გვაქვს (კომპენსირებულია \mathbf{M} -ის დამატებით). (5.2.2) განტოლებაში ცვლადების გადალაგებით გვექნება

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (5.2.3)$$

ლიტერატურა

- [1] ზილაშვილი, ზ.: *ვექტორული და ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები*; თ.ს.უ.;თბილისი; 2ე გამოცემა, 1978
- [2] რუსაძე: *ტენზორული აღრიცხვა და ველის თეორიის ელემენტები*;თ.ს.უ.; თბილისი, 1997
- [3] JACKSON, J.: *Classical Electrodynamics*, (2001).
- [4] JACKSON, J.: *Classical Electrodynamics*, (1963).
არის რუსული თარგმანი ДЖЕКСОН, *Классическая Электродинамика*, 1963